# پاسخنامه
# ریاضی
# مشتق

www.mapedu.ir

کانون
فرهنگی
آموزش
قلم چی

**1 – گزینهٔ «۲»** *(سهیل ساسانی)*

راه حل اول: طبق رابطهٔ $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$ داریم:

$$(\frac{2f+3g}{g})'(3) = \frac{(2f'(3)+3g'(3))g(3) - g'(3)(2f(3)+3g(3))}{g^2(3)}$$

$$= \frac{(2(-1)+3(-\frac{1}{2}))\times(-2) - (-\frac{1}{2})(2(2)+3(-2))}{(-2)^2} =$$

$$\frac{(-2-\frac{3}{2})(-2)-(-\frac{1}{2})(-2)}{(-2)^2} = \frac{\overbrace{(\frac{-7}{2})(-2)-(1)}^{6}}{4} = \frac{3}{2}$$

راه حل دوم:

$$(2\frac{f}{g}+3)'(3) = \frac{2f'(3)g(3) - g'(3)(2f(3))}{(g(3))^2} + 0$$

$$= \frac{2(-1)(-2)-(-\frac{1}{2})(4)}{(-2)^2} = \frac{4+2}{4} = 1/5$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)*

---

**2 – گزینهٔ «۴»** *(ایلا مرادی)*

آهنگ متوسط تابع از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 4$ با رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}$$

برای به‌دست آوردن آهنگ لحظه‌ای باید مشتق تابع را بدست بیاوریم:

$$f'(x) = \frac{0(x^2) - 2x(16)}{x^4} = \frac{-32}{x^3}$$

$$\Rightarrow f'(\sqrt[3]{8}) = \frac{-32}{(\sqrt[3]{8})^3} = \frac{-32}{8} = -4$$

اختلاف آهنگ متوسط و لحظه‌ای برابر است با:

$$-\frac{3}{2} - (-4) = -\frac{3}{2} + 4 = \frac{5}{2} = 2/5$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۱۰۰)*

---

**3 – گزینهٔ «۳»** *(علی ساوجی)*

با توجه به $(fog)'(x) = g'(x).f'(g(x))$ داریم:

$$(f(x^3+5x))' = (x^8+x^4-1)'$$

$$\Rightarrow (3x^2+5).f'(x^3+5x) = 8x^7+4x^3$$

اگر در رابطهٔ بالا قرار دهیم $x=1$، آن‌گاه:

$$(3+5)f'(6) = 8+4 \Rightarrow 8f'(6) = 12$$

$$\Rightarrow f'(6) = 1/5$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۸)*

---

**4 – گزینهٔ «۴»** *(امیرهوشنگ انصاری)*

با دقت به جدول متوجه می‌شویم با افزایش x مقادیر تابع f نیز افزایش می‌یابد پس تابع f اکیداً صعودی است. یعنی گزینهٔ «۱» یا «۴» صحیح است.

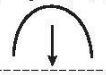
از طرفی شیب خطوط گذرنده از دو نقطه با طول صحیح متوالی در حال کاهش است.

| x | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | ۱۲ | ۲۰ | ۲۶ | ۳۰ | ۳۲ |
| شیب | | ۸ | ۶ | ۴ | ۲ |

پس گزینهٔ ۴ صحیح است.

توجه) اگر شیب‌های گذرنده از دو نقطهٔ با طول صحیح متوالی در حال افزایش باشد، تقعر منحنی روبه بالاست.

اگر شیب‌های گذرنده از دو نقطهٔ متوالی در حال کاهش باشد، تقعر منحنی رو به پایین است.



*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحهٔ ۱۰۰)*

---

**5 – گزینهٔ «۱»** *(شهرام ولایی)*

از طرفین تساوی مشتق می‌گیریم:

$$(2x-1)f'(x^2-x) = 3x^2g'(x^3)f'(g(x^3))$$

$$x=1 \rightarrow f'(0) = 3g'(1)f'(g(1)) = 3g'(1)f'(0) \xrightarrow{f'(0)\neq 0} 3g'(1) = 1$$

$$\rightarrow g'(1) = \frac{1}{3}$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۸)*

---

**6 – گزینهٔ «۲»** *(پویان طهرانیان)*

معادلهٔ خط مماس بر تابع $f(x)$ در نقطهٔ به طول $x=-1$ واقع بر آن خط $y=3x+4$ است که شیب آن برابر ۳ می‌باشد یعنی: $f'(-1)=3$

از طرفی خط مماس در نقطه‌ای به طول $x=-1$ بر تابع $f(x)$ مماس است پس مقدار تابع در $x=-1$ یعنی $f(-1)$ برابر است با:

$$y=3x+4 \xrightarrow{x=-1} y=1 \rightarrow \text{نقطه } A(-1,1)$$

$$\Rightarrow f(-1)=1$$

حال باید خط مماس بر تابع $y=g(x)$ را در نقطهٔ $x=3$ پیدا کنیم پس:

$$g(3) = f(17-2(3^2)) = f(-1) = 1 \rightarrow (3,1) \in g$$

از طرفی: $g'(x) = -4xf'(17-2x^2) \xrightarrow{x=3} g'(3) = -12f'(-1)$

شیب: $\xrightarrow{f'(-1)=3} g'(3) = -12\times 3 = -36$

معادلهٔ خط مماس: $y-1 = -36(x-3) \rightarrow y = -36x+109$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۸)*

---

**7 – گزینهٔ «۴»** *(سروش موئینی)*

در $x=-2$ تابع $[x]$ پیوستگی راست دارد که برای محاسبهٔ مشتق راست داریم: (حد مورد نظر برابر مشتق راست در $x=-2$ است.)

در سمت راست $x=-2$ داریم: $[x]=-2$ و $|x|=-x$ پس:

$$f(x) = (2x^2+1)^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = \underset{\text{توان}}{2}\ \underset{\text{مشتق پایه}}{(4x)}\ \underbrace{(2x^2+1)}_{\text{یک توان کم‌تر}} \Rightarrow f'_+(-2) = -144$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۸)*

**8 – گزینهٔ «۳»** *(شهرام ولایی)*

می‌دانیم $f'(g(x)).g'(x)=(fog)'(x)$:

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{4-\frac{4x^2}{1+x^2}}}=\frac{\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}}=x$$

$\Rightarrow (fog)'(x)=1\Rightarrow y=1$ تابع ثابت هم صعودی هم نزولی است.

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۸)*

---

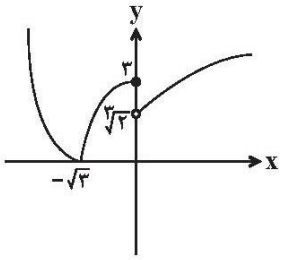
**9 – گزینهٔ «۲»** *(بابک سادات)*

ابتدا پیوستگی در نقطهٔ مرزی را بررسی می‌کنیم چون ضابطه‌ها تک‌تک در دامنه خود پیوسته‌اند. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=3\ ,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\sqrt[3]{2}$

تابع در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. چون پیوسته نیست.

در مرحلهٔ دوم مشتق‌پذیری را در ضابطه‌ها بررسی می‌کنیم. $|x^2-3|$ در نقطهٔ $\pm\sqrt{3}$ گوشه‌ای و مشتق‌ناپذیر است که $\sqrt{3}$ در دامنه تابع f نیست و $x=-\sqrt{3}$ نقطه مشتق‌ناپذیر بعدی می‌باشد. ضابطهٔ پایینی هم که فقط به‌ازای $x=-2$ مشتق‌ناپذیر است که جزو دامنه تابع f نیست پس فقط دو نقطه مشتق‌ناپذیر داریم.

روش دوم: نمودار تابع را رسم می‌کنیم، با توجه به نمودار، تابع f در ۲ نقطهٔ $-\sqrt{3}$ و $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.




*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۲)*

---

**10 – گزینهٔ «۲»** *(سید بهوار نظری)*

برای محاسبهٔ $h'(3)$، طبق رابطه $(f(u))'=u'f'(u)$ داریم:

$$h(x)=\frac{f(2x-1)}{g(x^2-x)}$$

$$h'(x)=\frac{[2f'(2x-1)g(x^2-x)]-[(2x-1)g'(x^2-x)f(2x-1)]}{g^2(x^2-x)}$$

$$h'(3)=\frac{[2f'(5)g(6)]-[5g'(6)f(5)]}{g^2(6)}\quad (I)$$

با توجه به نمودار داده شده، تابع خطی g از دو نقطه $(9,0)$ و $(5,4)$ عبور می‌کند پس:

$$g(x)=-x+9\Rightarrow\begin{cases}g(6)=3\\ g'(6)=-1\end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم که مشتق تابع در یک نقطه برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه است پس: $f'(5)=-1$

$$\xrightarrow{(I)} h'(3)=\frac{(2\times(-1)\times 3)-(5\times(-1)\times 4)}{9}=\frac{-6+20}{9}=\frac{14}{9}$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۸)*

**11 – گزینهٔ «۱»** *(عرفان رفائی)*

می‌دانید تابع $f=g\times|u|$ در ریشه‌های ساده $u=0$ مشتق‌ناپذیر است مگر آن‌که ریشه ساده u، ریشهٔ تابع g نیز باشد.

$$f(x)=(x+2)(x-1)\,|(x+3)(x-1)|$$

$x=1$ و $x=-3$ ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق هستند ولی چون $x=1$ ریشه عبارت پشت قدر مطلق نیز هست، پس تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر است؛ بنابراین تابع فقط در نقطه $x=m=-3$ مشتق‌ناپذیر است.

| x | | $-3$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x+3)(x-1)$ | + | 0 | − | 0 | + |

$$\Rightarrow\begin{cases}x\to(-3)^+\Rightarrow f(x)=-(x+3)(x+2)(x-1)^2\\ x\to(-3)^-\Rightarrow f(x)=(x+3)(x+2)(x-1)^2\end{cases}$$

می‌دانید اگر در تابع $f(x)=g(x)h(x)$، $g(a)=0$ باشد، آن‌گاه $f'(a)=g'(a)h(a)$

$$\begin{cases}x\to(-3)^+\Rightarrow f'(x)=-(x+2)(x-1)^2\\ \Rightarrow f'_+(-3)=-(-1)(-4)^2=16\\ x\to(-3)^-\Rightarrow f'(x)=(x+2)(x-1)^2\\ \Rightarrow f'_-(-3)=(-1)(-4)^2=-16\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{f'_+(-3)}{f'_-(-3)}=-1$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)*

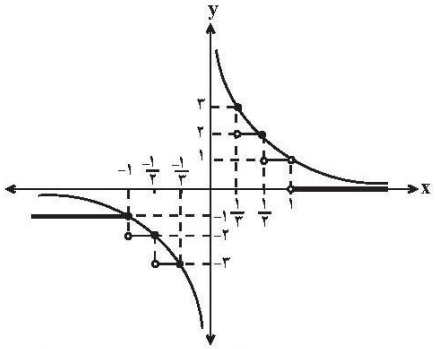
---

**12 – گزینهٔ «۴»** *(سیار راوطلب)*

ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=[\frac{(x-1)}{x(x-1)}]\Rightarrow f(x)=[\frac{1}{x}]\ ,\ x\neq 1$$

حال می‌توان رسم کرد:




همان‌طوری‌که مشاهده می‌کنید از میان گزینه‌ها، تابع تنها در بازه $(-\infty,-1]$ برابر تابع ثابت $f(x)=-1$ است، در نتیجه روی این بازه پیوسته و مشتق‌پذیر می‌شود.

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۴)*

---

**13 – گزینهٔ «۴»** *(محمدسیار پیشوایی)*

با فاکتورگیری از g خواهیم داشت: $g(f'g+g'f)=g(fg)'$

$$fg=(\sqrt{2x-3}+\sqrt{6-x}).(\sqrt{2x-3}-\sqrt{6-x})=(2x-3)-(6-x)$$
$$=3x-9$$

$$(fg)' = (3x-9)' = 3$$

$$g(fg)' = 3(\sqrt{2x-3} - \sqrt{6-x}) \xrightarrow{x=2} 3(1-2) = -3$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

---

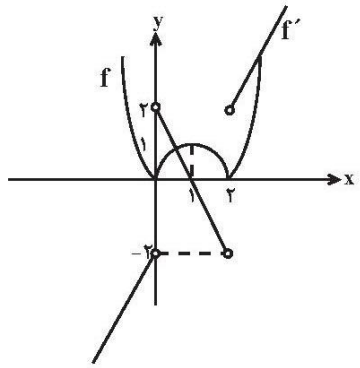
**14 – گزینهٔ «۳»** (شهرام ولایی)

ابتدا ضابطهٔ تابع $f$ را چند ضابطه‌ای می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & , \ x \le 0, x \ge 2 \\ -x^2 + 2x & , \ 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$\to f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & , \ x < 0, x > 2 \\ -2x + 2 & , \ 0 < x < 2 \end{cases}$$

نمودار $f$ و $f'$ را رسم می‌کنیم. همان‌طور که می‌بینید دو تابع در دو نقطه متقاطع‌اند.




(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

---

**15 – گزینهٔ «۳»** (مهدی براتی)

می‌دانیم که $(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$ است، پس داریم:

$$g(x) = x^3 + 3x - 2 \to g'(x) = 3x^2 + 3 \to g'(1) = 6$$

برای مشتق گرفتن از ضابطهٔ تابع $f$ ابتدا آن را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{12x}{\sqrt{7x+2} + \sqrt{x+2}} \times \frac{\sqrt{7x+2} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{7x+2} - \sqrt{x+2}} = \frac{12x}{7x+2-x-2}$$

$$\times(\sqrt{7x+2} - \sqrt{x+2}) \to f(x) = 2(\sqrt{7x+2} - \sqrt{x+2})$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2\left(\frac{7}{2\sqrt{7x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)$$

$$\Rightarrow f'(g(1)) = f'(2) = 2\left(\frac{7}{2\sqrt{16}} - \frac{1}{2\sqrt{4}}\right) = 2\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow g'(1) \times f'(g(1)) = 6 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{2}$$

شیب خط مماس بر تابع $fog$ در $x=1$ برابر $\frac{15}{2}$ است.

$$f(g(1)) = f(2) = \frac{12 \times 2}{\sqrt{16} + \sqrt{4}} = 4$$

$$\begin{cases} \text{شیب} : m = \frac{15}{2} \Rightarrow y - 4 = \frac{15}{2}(x-1) \to y = \frac{15}{2}x - \frac{7}{2} \\ \text{مختصات نقطه} : (1,4) \end{cases}$$

عرض از مبدأ خط مماس برابر $-\frac{7}{2}$ است.

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۸)

---

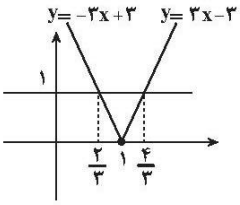
**16 – گزینهٔ «۲»** (سعید تن‌آرا)

تابع $f(x) = |x^3 - 1|$ در $x = 0$ دارای مشتق صفر است $(b = 0)$ زیرا:

$$x < 1 \to f(x) = -x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$$

بنابراین معادله خط مماس در $x = 0$ به‌صورت $y = 1$ خواهد بود. $(f(0) = 1)$

همچنین $f$ در $x = 1$ مشتق‌ناپذیر است $(a = 1)$ و شیب نیم‌خط‌های مماس چپ و راست به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:




$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{|x^3 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} -(x^2 + x + 1) = -3$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{|x^3 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + x + 1) = 3$$

نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x = 1$ از نقطهٔ $(1,0)$ می‌گذرند، بنابراین معادله نیم‌خط مماس چپ برابر $y = -3x + 3$ و معادله نیم‌خط مماس راست به‌صورت $y = 3x - 3$ خواهد بود. این دو نیم‌خط، خط مماس $y = 1$ را در نقاط $x = \frac{2}{3}$ و $x = \frac{4}{3}$ قطع خواهند کرد لذا

$$S = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)

---

**17 – گزینهٔ «۲»** (سیار راوطلب)

در بین توابع داده شده در گزینه‌ها، گزینهٔ «۱» و گزینهٔ «۴» در $x = 0$ پیوسته نیستند، بنابراین مشتق‌پذیر نیستند.

گزینهٔ «۱»: $\lim_{x \to 0} f^2(x) = 4, f^2(0) = 1$

گزینهٔ «۴» $\lim_{x \to 0} |f(x)| = 2, |f(0)| = 1$

تابع گزینهٔ ۳ پیوسته است ولی مشتق چپ با راست برابر نیستند.

گزینهٔ «۳»: $\lim_{x \to 0} xf(x) = 0 \quad , \quad y = xf(x) \xrightarrow{x=0}$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{xf(x) - 0}{x} = 2, f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{xf(x) - 0}{x - 0} = -2$$

تابع داده شده در گزینهٔ «۲» پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$\lim_{x \to 0} |x| f(x) = 0 \quad , \quad y = |x| f(x) \xrightarrow{x=0}$$

$$\begin{cases} f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{xf(x)}{x} = 2 \\ f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-xf(x)}{x} = 2 \end{cases}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)

www.mapedu.ir

**18 – گزینهٔ «۳»** *(سروش موئینی)*

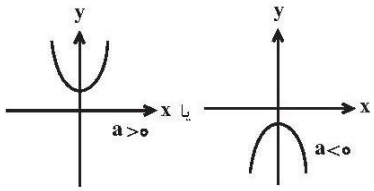
ضابطهٔ f را به‌صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$g(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & , x\ge 1 \\ 2ax+b & , x<1 \end{cases} \Rightarrow g'(x)=\begin{cases} 2ax+b, & x\ge 1 \\ 2a & , x<1 \end{cases}$$

$x=1$ در g شرط پیوستگی: $a+b+c=2a+b \quad \Rightarrow a=c$

$x=1$ در g شرط مشتق‌پذیری: $2a+b=2a \quad \Rightarrow b=0$

پس $f(x)=ax^2+a$ و بنابراین نمودار f به‌صورت زیر است:




تابع f قطعاً از ۲ ناحیه می‌گذرد.

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)*

---

**19 – گزینهٔ «۳»** *(سهیل حسن‌خان‌پور)*

می‌دانیم مشتق تابع $y=\sqrt[3]{u}$ برابر $y'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$ است. پس داریم:

$$y'=\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}+x+2}{-x+5}}\right)'=\frac{\left(\frac{\sqrt{x}+x+2}{-x+5}\right)'}{3\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{x}+x+2}{-x+5}\right)^2}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}+x+2}{-x+5}\right)'=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)(-x+5)-(-1)(\sqrt{x}+x+2)}{(-x+5)^2}\xrightarrow{x=4}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{4}+1\right)(-4+5)-(-1)(2+4+2)}{(-4+5)^2}=\frac{5}{4}+8=\frac{37}{4}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{37}{4}\times\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{8}{1}\right)^2}}=\frac{37}{48}$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۸)*

---

**20 – گزینهٔ «۲»** *(اکبر کلاه‌ملکی)*

ابتدا ضابطهٔ تابع وارون را به‌دست می‌آوریم:

$$y=2+\sqrt{x+1}\Rightarrow x=2+\sqrt{y+1}$$

$$\to \sqrt{y+1}=x-2\to y=(x-2)^2-1$$

$$\to f^{-1}(x)=(x-2)^2-1\to (f^{-1})'(x)=2(x-2)$$

$$f(x)=2+(x+1)^{\frac{1}{2}}\to f'(x)=\frac{1}{2}(x+1)^{\frac{-1}{2}}\to f''(x)=\frac{-1}{4}(x+1)^{\frac{-3}{2}}$$

$$(f'of^{-1}(x))'=(f^{-1})'(x)\times f''(f^{-1}(x))\xrightarrow{x=3}(f^{-1})'(3)\times f''(f^{-1}(3))$$

$$=2\times f''(0)=2\times\left(\frac{-1}{4}\right)=\frac{-1}{2}$$

روش دوم:

$$y=2+\sqrt{x+1}\Rightarrow f^{-1}(x)=(x-2)^2-1$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(f^{-1}(x))=\frac{1}{2\sqrt{(x-2)^2-1+1}}=\frac{1}{2|x-2|}$$

$$(f'(f^{-1}(x))'_{x=3}=\left(\frac{1}{2(x-2)}\right)'_{x=3}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{-1}{(x-2)^2}\right)_{x=3}=-\frac{1}{2}$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۹۲)*

**21 – گزینهٔ «۴»** *(مهدی براتی)*

مشتق چپ و راست در $x=-2$ را با تعریف حدی مشتق به دست می‌آوریم:

$$g'_+(-2)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{g(x)-g(-2)}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{\frac{(x^2-4)f(x)}{[-x]}-0}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{(x-2)f(x)}{[-x]}=\frac{(-4)\times(-1)}{[2^-]}=\frac{4}{1}=4$$

$$g'_-(-2)=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{g(x)-g(-2)}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{\frac{(x^2-4)f(x)}{[-x]}-0}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{(x-2)f(x)}{[-x]}=\frac{-4\times(-2)}{[2^+]}=\frac{8}{2}=4$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$g'_-(-2)-g'_+(-2)=4-4=0$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)*

---

**22 – گزینهٔ «۲»** *(سیدبهوار نظری)*

چون تابع f بر روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است، بنابراین هریک از ضابطه‌ها در دامنهٔ خود مشتق‌پذیرند. لذا باید تابع f در مرز ضابطه‌ها $(x=0)$ هم مشتق‌پذیر باشد که برای تحقق این امر، باید اولاً تابع در $x=0$ پیوسته باشد، ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در $x=0$ با هم برابر باشند، پس:

$x=0$ شرط پیوستگی در: $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$

$$-\sqrt{m}=n\Rightarrow \sqrt{m}=n$$

$x=0$ شرط مشتق‌پذیری در: $f'_+(0)=f'_-(0)$

$$\begin{cases} f'_+(0): f'=2x \xrightarrow{4} 2\sqrt{4x+m} \quad f'_+(0)=\frac{2}{\sqrt{m}} \\ f'_-(0): f'=1 \xrightarrow{n} (x-1)^2 \quad f'_-(0)=1\ n \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_+(0)=f'_-(0)\Rightarrow 1-n=\frac{2}{\sqrt{m}}\xrightarrow{\sqrt{m}=n}1-n=\frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow -n^2+n+2=0\Rightarrow\begin{cases} n=-1\xrightarrow{n=\sqrt{m}}\text{غ ق ق} \\ n=2\xrightarrow{n=\sqrt{m}}m=4 \end{cases}$$

درنتیجه داریم:

$$\begin{cases} m=4 \\ n=2 \end{cases}\Rightarrow\frac{m}{n}=\frac{4}{2}=2$$

توجه: به‌ازای $m=4$ و شرط ضابطهٔ $x\ge 0$، زیر رادیکال همواره نامنفی است. همین‌طور عدد $x=1$ در شرط ضابطهٔ پایین قرار ندارد.

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)*

www.mapedu.ir

**23 – گزینهٔ «۳»** *(وحید ون‌آبادی)*

چندجمله‌ای پشت قدرمطلق همواره مشتق‌پذیر است. هم‌چنین نقطهٔ مشتق‌ناپذیری تابع $f$، ریشهٔ ساده عبارت داخل قدرمطلق است. با این حساب که زمانی تبدیل به نقطهٔ مشتق‌پذیر می‌شود که عامل صفرشونده بیرون قدرمطلق باشد.

$$3(1)^2 - a(1) + 1 = 0 \Rightarrow -a = -4 \Rightarrow a = 4$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)*

**24 – گزینهٔ «۱»** *(میلاد منصوری)*

دقت کنید که داریم:

$$\left(\frac{fof(x)}{f(x)+1}\right)' = \frac{(fof(x))'(f(x)+1) - (f'(x))(fof(x))}{(f(x)+1)^2}$$

$$= \frac{(f'(x)f'(f(x))(f(x)+1) - (f'(x))(f(f(x))}{(f(x)+1)^2}$$

$$\xrightarrow{x=1} \frac{(f'(1))(f'(f(1)))(f(1)+1) - f'(1)(f(f(1)))}{(f(1)+1)^2}$$

حالا با توجه به این‌که $f(1)=4$ و $f'(1)=3$ داریم:

$$\frac{(3\times f'(4))(5) - 3\times f(4)}{5^2} = \frac{3(5f'(4) - f(4))}{25}$$

حالا توجه می‌کنیم که $f'(4)=3$ و $f(4)=13$. بنابراین:

$$\frac{3(5\times 3 - 13)}{25} = \frac{6}{25} \quad \cancel{0/24}$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۸۸)*

---

**25 – گزینهٔ «۳»** *(سروش موئینی)*

$$(gof)'(3) = g'(f(3))f'(3) \quad \overset{f(3)=2}{} \quad \cancel{g'(2)f'(3) = 6}$$

$$f'(x) = \frac{-2+1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2} \Rightarrow \cancel{f'(3) =} \Rightarrow \cancel{g'(2) =} \quad 6$$

حالا داریم:

$$(fog)'(2) = g'(2)f'(g(2)) = \cancel{2} \quad \cancel{f'(1) =} \times \cancel{6} \quad \frac{-1}{9} \quad \frac{2}{3}$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۸۸)*

---

**26 – گزینهٔ «۴»** *(وحید انصاری)*

$$d \text{ خط}: \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow \cancel{2x + 3y = 6}$$

خط $d$ در نقطهٔ $x=2$ بر نمودار تابع $g$ مماس است. بنابراین می‌توان $g(2)$ و $g'(2)$ را به راحتی به‌دست آورد:

$$\begin{cases} g(2) = \frac{2}{3} \\ g'(2) = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2.g^2(3 \quad x) \quad x^3.(2 \quad +1).g(3\times \cancel{x}).g'(3 \quad -x)$$

$$\Rightarrow f'(1) = 3g^2(2) \quad \cancel{+}g(2)g'(2) \quad \cancel{=}3(\frac{2}{3})^2 \quad 2(\frac{2}{3})(\frac{-2}{3}) \quad \frac{20}{9}$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۸۸)*

---

**27 – گزینهٔ «۳»** *(وحید ون‌آبادی)*

$$f(x) = \frac{(x-1)+(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-1} = (x-4)^{-1} + (x-1)^{-1}$$

$$f'(x) = \cancel{(x \quad 4)^{-2}} \quad (x \quad 1)^{-2}$$

$$f''(x) = 2(x-4)^{-3} + 2(x-1)^{-3} = \frac{2}{(x-4)^3} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f''(5) = \cancel{2} \quad \frac{1}{32} \Rightarrow \quad f''(5) = \frac{65}{32}$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۹۲)*

**28 – گزینهٔ «۴»** *(لیلا مرادی)*

آهنگ متوسط تغییر تابع را با فرمول زیر می‌توان به‌دست آورد:

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{\sqrt{18-2}-\sqrt{2-2}}{2} \quad \frac{4-0}{2} = 2$$

و برای محاسبهٔ آهنگ لحظه‌ای باید از تابع مشتق بگیریم:

$$f'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2-2}} \Rightarrow f'(4) = \frac{16}{2\sqrt{30}} = \frac{8}{\sqrt{30}}$$

نسبت آهنگ متوسط به آهنگ لحظه‌ای برابر است با:

$$\frac{2}{\frac{8}{\sqrt{30}}} = \frac{\sqrt{30}}{4}$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۳ تا ۱۰۰)*

**29 – گزینهٔ «۳»** *(سروش موئینی)*

شرط مشتق‌پذیری در $x=1$ این است که حدهای چپ و راست و مشتق‌های چپ و راست در $x=1$ برابر باشند.

پیوستگی: $1 - 3 = a + \frac{b}{1} \Rightarrow a + b = -2$

مشتق‌پذیری: $3(1)^2 - 6(1) = 0 - \frac{b}{(1)^2} \Rightarrow -3 = -b \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = -5$

پس ضابطه پایین $-5 + \frac{3}{x}$ است و در $x=2$ داریم:

مقدار: $f(2) = -5 + \frac{3}{2} = \frac{-7}{2}$

مشتق: $f'(2) = m = \frac{-3}{2^2} = \frac{-3}{4}$

معادله مماس در $(2, \frac{-7}{2})$ با شیب $\frac{-3}{4}$ به‌صورت $y - (\frac{-7}{2}) = \frac{-3}{4}(x-2)$ است و عرض از مبدأ آن برابر است با:

$$y = \frac{-3}{4}(-2) - \frac{7}{2} = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -2$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)*

---

**30 – گزینهٔ «۴»** *(سروش موئینی)*

حد مورد نظر برابر $f'_+(2)$ است. در سمت راست $x=2$ داریم:

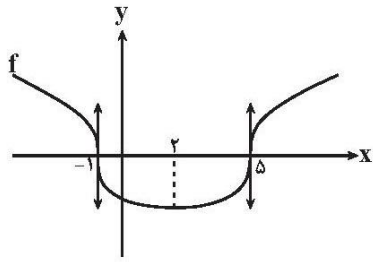
$$\xrightarrow{[x]=2} f(x) = (\frac{x}{2}+1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(\frac{1}{2})(\frac{x}{2}+1)^2$$

$$\Rightarrow f'_+(2) = \frac{3}{2}(1+1)^2 = \frac{3}{2}(4) = 6$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۹۲)*

**31 – گزینهٔ «۳»** *(سروش موئینی)*

مشتق تابع به‌صورت $f'(x)=\dfrac{2x-4}{3\sqrt[3]{(x^2-4x-5)^2}}$ است که در $x=2$ صفر می‌شود و در $x=-1$ و $x=5$ وجود ندارد. پس در $x=2$ خط مماس افقی است و در $x=5\ ,-1$ خط مماس عمودی است یعنی ۳ مماس موازی محورها داریم:




*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۹۲)*

---

**32 – گزینهٔ «۳»** *(سامان سلامیان)*

با کمی دقت متوجه می‌شویم که عبارت خواسته شده شبیه مشتق $y=\dfrac{1}{f(x)}$ است:

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}$$

پس بهتر است ابتدا $y=\dfrac{1}{f(x)}$ را بسازیم:

$$y=\frac{1}{f(x)}=\frac{x^3+x^2+2}{x}=x^2+x+\frac{2}{x}$$

از دو طرف تساوی مشتق می‌گیریم:

$$y'=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}=2x+1-\frac{2}{x^2}$$

$$\xrightarrow{x=2}-\frac{f'(2)}{f^2(2)}=2(2)+1-\frac{2}{(2)^2}=4/5$$

$$\Rightarrow\frac{f'(2)}{f^2(2)}=-4/5$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۹۲)*

---

**33 – گزینهٔ «۱»** *(پویان طهرانیان)*

صورت کسر به‌ازای $x\to-1$ برابر صفر است. با توجه به اینکه حاصل حد ۲ است، بنابراین مخرج کسر نیز باید صفر شود. پس: $\Rightarrow f(-1)=4$

$$\lim_{x\to-1}\frac{4x+4}{f(x)-4}=2\Rightarrow 4\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{f(x)-4}=2$$

$$\Rightarrow 4\times\frac{1}{f'(-1)}=2\Rightarrow f'(-1)=2$$

حال باید از $y=x^2f(\frac{1}{x})$ مشتق بگیریم:

$$y'=2xf(\frac{1}{x})+(\frac{-1}{x^2}f'(\frac{1}{x}))\times x^2\xrightarrow{x=-1}$$

$$y'=-2f(-1)-f'(-1)=-2(4)-(2)=-10$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۹۲)*

---

**34 – گزینهٔ «۳»** *(محمدابراهیم توزنده‌جانی)*

$f(4)=2, f'(4)=3$

از دو طرف تساوی $g(x)=f(2f(x^2))$ مشتق می‌گیریم:

$$g(x)=f(2f(x^2))\Rightarrow g'(x)=2\times 2x\times f'(x^2)\times f'(2f(x^2))$$

$$\xrightarrow{x=2}g'(2)=8f'(4)f'(2f(4))=8\times 3\times f'(4)=8\times 3\times 3=72$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۹۲)*

---

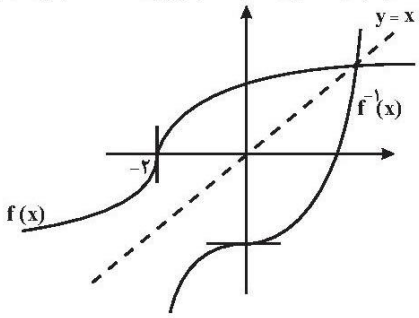
**35 – گزینهٔ «۱»** *(پویان طهرانیان)*

تابع $y=f(x)$ در $x=-2$ پیوسته است، از طرفی داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} & ;x>-2\\[2mm] \dfrac{1}{2\sqrt{-x-2}} & ;x<-2\end{cases}\Rightarrow f'_+(-2)=f'_-(-2)=+\infty$$

یعنی $y=f(x)$ در $x=-2$ مشتق‌ناپذیر و دارای مماس قائم است. نقطهٔ $(-2,0)$ روی تابع $f(x)$ است، پس نقطهٔ $(0,-2)$ متناظر با آن روی $f^{-1}(x)$ خواهد بود. پس تابع $y=f^{-1}(x)$ در $x=0$ دارای مماس افقی و در نتیجه مشتق‌پذیر است.

تذکر: شیب مماس در هر نقطه روی $f$ و متناظر آن روی $f^{-1}$، معکوس یکدیگر هستند.




*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)*

---

**36 – گزینهٔ «۳»** *(مهانبش نیکنام)*

آهنگ تغییر متوسط در فاصله $[x_1,x_2]$ برابر است با $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ این مقدار همان شیب خط $8y-5x=16$ یعنی $\dfrac{5}{8}$ می‌باشد.

$$f'(x)=\frac{5}{8}\Rightarrow\frac{5}{2\sqrt{5x+1}}=\frac{5}{8}\Rightarrow\sqrt{5x+1}=4\Rightarrow 5x+1=16$$

$$\Rightarrow x=3$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۶، ۹۳ تا ۱۰۰)*

**37- گزینهٔ «۴»** *(توحید اسدی)*

تابع $g(x)$ در نقطهٔ $x=3$ ناپیوسته است اما چون $f(3)=0$ است بنابراین تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=3$ پیوسته است، پس با توجه به تعریف مشتق داریم:

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\lim_{x\to 3}\frac{\frac{2x^2-18}{x+g(x)}-0}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x^2-9)}{(x-3)(x+g(x))}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x+3)}{x+g(x)}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{12}{3+k}=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 9=3+k\Rightarrow k=6$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۶)*

---

**38- گزینهٔ «۴»** *(توحید اسدی)*

با توجه به نمودار $f$ داریم $f(2)=3$ و همچنین شیب خط $d$ برابر $f'(2)$ است. بنابراین:

$$m_d=\frac{0-3}{5-2}=-1\Rightarrow f'(2)=-1$$

می‌دانیم: $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

با تغییر متغیر $3x=t$ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2+3x)-3}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(2+t)-f(2)}{\frac{t}{3}}=3\times\lim_{t\to 0}\frac{f(2+t)-f(2)}{t}$$

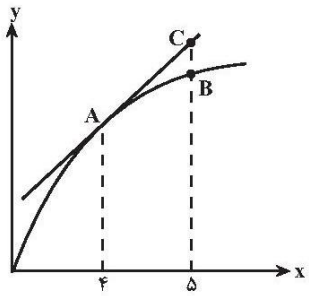
$$=3f'(2)=3\times(-1)=-3$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۶)*

**39- گزینهٔ «۱»** *(هامد نصیری)*

ابتدا معادلهٔ خط مماس بر منحنی $f(x)$ در نقطهٔ $A(4,25)$ را می‌نویسیم.

$(m_A=f'(4)=1/5)$




معادلهٔ خط مماس: $y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-25=1/5(x-4)$

$$\Rightarrow y=1/5x+19$$

چون نقطهٔ B پایین‌تر از نقطهٔ $C(5,26/5)$ قرار دارد، با توجه به گزینه‌ها $f(5)=26$ قابل قبول است.

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۶)*

**40- گزینهٔ «۲»** *(بهانبخش نیکنام)*

زمانی تابع $f$ در تمام نقاط دامنه، مشتق‌پذیر است که معادلهٔ $x^2-(2k+1)x+k+5=0$ دو ریشهٔ متمایز نداشته باشد یعنی $\Delta\le 0$:

$$\Rightarrow(2k+1)^2-4(k+5)\le 0\Rightarrow 4k^2-19\le 0\Rightarrow\frac{-\sqrt{19}}{2}\le k\le\frac{\sqrt{19}}{2}$$

مقادیر صحیح $k$ عبارتند از $\pm 2,\pm 1,0$ *(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۲)*

---

**41- گزینهٔ «۳»** *(سیار راوطلب)*

روش اول:

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=f'_-(1)+f'_+(1)$$

$$f'(x)=\begin{cases}4x & x>1\\ 5 & x<1\end{cases}$$

بنابراین: $f'_-(1)+f'_+(1)=5+4=9$

روش دوم: ابتدا حاصل حد زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}=\frac{0}{0}\overset{HoP}{\Longrightarrow}\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f'(1+\Delta x)+f'(1-\Delta x)}{1}=f'_-(1)+f'_+(1)$$

لذا داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}4x & x>1\Rightarrow f'_+(1)=4\\ 5 & x<1\Rightarrow f'_-(1)=5\end{cases}\Rightarrow f'_+(1)+f'_-(1)=9$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۸۷)*

---

**42- گزینهٔ «۴»** *(محسن اسماعیل‌پور)*

نقطهٔ مشتق‌ناپذیر تابع $y=x|x-2|$ همان ریشهٔ معادله $x-2=0$ است، بنابراین:

$$x-2=0\Rightarrow x=2$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x\ge 2\\ -x^2+2x & x<2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x-2 & x>2\\ -2x+2 & x<2\end{cases}$$

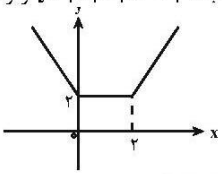
$$\begin{matrix}f'_+(2)=2\\ f'_-(2)=-2\end{matrix}\Rightarrow f'_+(2)-f'_-(2)=4$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)*

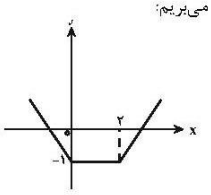
---

**43- گزینهٔ «۲»** *(سروش موئینی)*

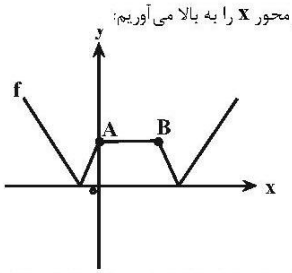
برای رسم نمودار این تابع ابتدا $y=|x|+|x-2|$ را رسم می‌کنیم:




نمودار را ۳ واحد به پایین می‌بریم:



و سپس قسمت زیر محور $x$ را به بالا می‌آوریم:




تابع در ۴ نقطه گوشه دارد (مشتق‌ناپذیر است) که فقط در نقاط $A$ و $B$ مشتق چپ از راست بیشتر است.

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۲)

---

**44- گزینهٔ «۴»** (بهرام هلاج)

ابتدا محل برخورد نمودار تابع با محور $y$ها را می‌یابیم:

$$x=0 \to y=6 \Rightarrow A(0,6)$$

حال برای یافتن شیب خط مماس بر تابع در نقطهٔ $A(0,6)$ داریم:

$$f'(x)=6x^2-18x+12 \xrightarrow{x=0} m=12 \xrightarrow{\text{معادلهٔ خط}} y=12x+6$$

پس برای به‌دست آوردن محل تلاقی خط مماس با نمودار تابع $f$ داریم:

$$2x^3-9x^2+12x+6=12x+6 \Rightarrow 2x^3-9x^2=0$$

$$\Rightarrow x^2(2x-9)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow f(\frac{9}{2})=60$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۸۷)

---

**45- گزینهٔ «۴»** (عباس اشرفی)

ضابطهٔ تابع را به‌صورت صریح می‌نویسیم و از آن مشتق می‌گیریم:

$$f(x)-x^2f(x)=x-3 \Rightarrow f(x)(1-x^2)=x-3$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x-3}{1-x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1(1-x^2)-(-2x)(x-3)}{(1-x^2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(2)=\frac{(-3)-(-4)(-1)}{9} \Rightarrow f'(2)=-\frac{7}{9}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۸۷)

---

**46- گزینهٔ «۳»** (معین کرمی)

در این تابع می‌دانیم $f(-1)=2$ است پس اگر در حد جایگذاری کنیم، داریم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{3(x-(-1))}=\frac{1}{3}f'(-1)$$

پس باید مشتق $f$ را در $x=-1$ محاسبه کنیم:

$$f(x)=\frac{x(2x\sqrt{-x})}{x(2x+1)} \overset{x\neq 0}{=} \frac{2x\sqrt{-x}}{2x+1}$$

$$f'(x)=\frac{(2\sqrt{-x}-\frac{2x}{2\sqrt{-x}})(2x+1)-2(2x\sqrt{-x})}{(2x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(-1)=\frac{(2+1)(-1)-2(-2)}{1}=\frac{-3+4}{1}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}f'(-1)=\frac{1}{3}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

---

**47- گزینهٔ «۳»** (عباس اشرفی)

نقاط $(\alpha,\alpha^2+1)$ و $(\beta,\beta^2+1)$ روی نمودار $f(x)=x^2+1$ قرار دارند. معادلهٔ خطوط مماس بر $f$ را در این نقاط می‌نویسیم:

$$(\alpha,\alpha^2+1) \Rightarrow f'(\alpha)=2\alpha$$

معادلهٔ خط مماس: $y-(\alpha^2+1)=2\alpha(x-\alpha)$

$$\Rightarrow y=2\alpha x-\alpha^2+1$$

$$(\beta,\beta^2+1) \Rightarrow f'(\beta)=2\beta$$

معادلهٔ خط مماس: $y-(\beta^2+1)=2\beta(x-\beta) \Rightarrow y=2\beta x-\beta^2+1$

دو خط برهم عمودند، بنابراین:

$$(2\alpha)(2\beta)=-1 \Rightarrow \alpha\beta=-\frac{1}{4}(*)$$

حال محل تقاطع دو خط را می‌یابیم:

$$2\alpha x-\alpha^2+1=2\beta x-\beta^2+1 \Rightarrow (2\alpha-2\beta)x=\alpha^2-\beta^2 \Rightarrow x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

حال عرض نقطهٔ تلاقی دو خط را می‌یابیم:

$$y=2\alpha x-\alpha^2+1=2\alpha(\frac{\alpha+\beta}{2})-\alpha^2+1=\alpha\beta+1$$

$$\xrightarrow{(*)} y=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۶ و ۸۵ تا ۸۷)

---

**48- گزینهٔ «۱»** (آریان حیدری)

برای محاسبهٔ $(fog)'(1)$ داریم:

$$(fog)'(1)=g'(1)f'(\underbrace{g(1)}_{2})=g'(1)f'(2)$$

حالا به شکل دقت کنید، خط مماس بر منحنی $g$ در نقطهٔ $x=1$ و خط مماس بر منحنی $f$ در نقطهٔ $x=2$ بر هم عمودند، پس حاصل‌ضرب شیب‌های این خطوط برابر ۱- است، یعنی:

$$g'(1)f'(2)=-1 \Rightarrow (fog)'(1)=-1 \Rightarrow m=-1$$

حالا با جایگذاری $m=-1$ در حد خواسته شده داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2-h)}{3h^2-h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2-h)}{h(\underbrace{3h-1}_{-1})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2-h)}{-h}(*)$$

می‌دانیم که حاصل حد فوق برابر با $-3f'(2)$ است.

حالا برای محاسبهٔ $f'(2)$ داریم:

$$g'(1)f'(2)=-1$$

$$g(x)=\frac{5x-1}{x+1} \Rightarrow g'(x)=\frac{6}{(x+1)^2} \Rightarrow g'(1)=\frac{3}{2}$$

پس:

$$\frac{3}{2}f'(2)=-1 \Rightarrow f'(2)=\frac{-2}{3} \Rightarrow -3f'(2)=2$$

توجه کنید که حاصل حد $(*)$ به‌صورت زیر ساده شد:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{-h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$

$$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{-2h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$

$$=-2f'(2)-f'(2)=-3f'(2)$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۸۸)

---

www.mapedu.ir

**49- گزینهٔ «۱»** *(فهیمه ولی‌زاده)*

$$f(x)=\left(\sqrt{\frac{3x^2+2x}{x+1}}\right)^3=\left(\frac{3x^2+2x}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}\left(\frac{3x^2+2x}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{3x^2+2x}{x+1}\right)'$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}\left(\frac{3x^2+2x}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(6x+2)(x+1)-(3x^2+2x)}{(x+1)^2}\right)$$

$$f'(1)=\frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{16-5}{4}\right)$$

$$\Rightarrow f'(1)=\frac{3}{2}\times\sqrt{2/5}\times\frac{11}{4}=\frac{3}{2}\times 1/58\times\frac{11}{4}\Rightarrow f'(1)\simeq 6/52$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۸۸)*

**50- گزینهٔ «۲»** *(سعید بناهی)*

می‌دانیم که توابع قدر مطلقی در ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق مشتق‌پذیر نیستند، لذا کافی است ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق را به دست آوریم.

$$f(x)=\left|x^4-|x|\right|=\left||x|^4-|x|\right|=|x|\left||x|^3-1\right|=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ |x|^3-1=0\Rightarrow|x|=1\Rightarrow x=\pm 1\end{cases}$$

لذا تابع در سه نقطه مشتق‌ناپذیر است. *(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)*

---

**51- گزینهٔ «۳»** *(سراسری ریاضی خارج از کشور – ۹۲)*

شرط پیوستگی:
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x-\frac{1}{x}\right)=1-1=0\\ \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+ax+b)=1+a+b\\ f(1)=1-1=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 1+a+b=0\Rightarrow a+b=-1$$

$$f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow 1+\frac{1}{x^2}=2x+a\Rightarrow 1+1=2+a$$

$$\Rightarrow a=0\ ,\ b=-1$$

پس:
$$f(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{x} & x\ge 1\\ x^2-1 & x<1\end{cases}$$

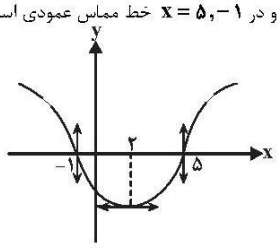
$$f(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})^2-1=1+2-2\sqrt{2}-1=2-2\sqrt{2}$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)*

---

**52- گزینهٔ «۳»** *(سروش موئینی)*

مشتق تابع $f$ به‌صورت $f'(x)=\dfrac{2x-4}{3\sqrt[3]{(x^2-4x-5)^2}}$ است که در $x=2$ صفر می‌شود و در $x=-1$ و $x=5$ وجود ندارد. پس در $x=2$ خط مماس افقی است و در $x=5,-1$ خط مماس عمودی است، یعنی ۳ مماس موازی محورها داریم:




*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۸۷)*

**53- گزینهٔ «۱»** *(بهرام ملاج)*

ابتدا به ساده‌سازی حد داده شده می‌پردازیم: $|h|=t,h\to 0\Rightarrow t\to 0^+$

$$\Rightarrow\lim_{t\to 0^+}\frac{f(-2+3t)-f(-2-4t)}{2t}\xrightarrow{Hop}$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{3f'(-2+3t)+4f'(-2-4t)}{2}$$

$$=\boxed{\frac{3f'_+(-2)+4f'_-(-2)}{2}}\ *$$

و نیز داریم:

| $x$ | | $-2$ | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2+3x-2$ | + | 0 | − | 0 | + |

حال به یافتن مشتق راست و چپ $f$ در $x=-2$ می‌پردازیم:

$$(-2)^+:f(x)=-(2x^2+3x-2)[3^-]=-4x^2-6x+4$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}}-8x-6\xrightarrow{x=-2}\boxed{10}$$

$$(-2)^-:f(x)=(2x^2+3x-2)[3^+]=6x^2+9x-6$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}}12x+9\xrightarrow{x=-2}\boxed{-15}$$

$$\xrightarrow{*}\frac{3(10)+4(-15)}{2}=\boxed{-15}$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)*

---

**54- گزینهٔ «۱»** *(سهند ولی‌زاده)*

$$\left.\begin{array}{l}m(L_2)=\frac{1}{2}\\ m(L_1)=f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=1$$

خط $L_1$ با شیب $\frac{1}{2}$ از نقطهٔ $A(1,1)$ می‌گذرد:

$$L_1\Rightarrow\begin{cases}A\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.\\ m(L_1)=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow 2y-x-1=0$$

خط $L_2$ با شیب $\frac{1}{2}$ از نقطهٔ $B(0,-1)$ می‌گذرد:

$$L_2\Rightarrow\begin{cases}B\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.\\ m(L_2)=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow 2y-x+2=0$$

فاصله دو خط موازی: $AH=\dfrac{|-1-2|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۶ و ۸۵ تا ۸۷)*

---

**55- گزینهٔ «۳»** *(نیما کدیوریان)*

طبق قانون مشتق توابع مرکب داریم:

$$g'(f(x))\times f'(x)=(g(f(x)))'$$

بنابراین در ابتدا ضابطه $g(f(x))$ را تشکیل داده و سپس از ضابطه مربوطه مشتق می‌گیریم:

$$g(f(x))=\frac{1}{x}\to(g(f(x)))'=\frac{-1}{x^2}$$

حال حاصل مشتق به ازای $x=2$ را به‌دست می‌آوریم: $(g(f(2)))'=\dfrac{-1}{2^2}=-\dfrac{1}{4}$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۸۸)*

---

**56- گزینهٔ «۴»** *(یاسین سپهر)*

از طرفین عبارت داده شده مشتق می‌گیریم: $kf(3x+4)=g(x^2-3x+1)$

$$\Rightarrow 3kf'(3x+4)=(2x-3)g'(x^2-3x+1)$$

حال برای این که $f'(1)$ ظاهر شود، عبارت $3x+4$ را مساوی ۱ قرار می‌دهیم:

$$3x+4=1\to x=-1$$

www.mapedu.ir

$$\xrightarrow{x=-1} 3kf'(3(-1)+4)=(2(-1)-3)g'((-1)^2-3(-1)+1)$$
$$\to 3kf'(1)=-5g'(5)\to 3k(-1)=-5\times 6$$
$$\to k=10$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۸۸)*

---

**57– گزینهٔ «۱»** *(محسن اسماعیل‌پور)*

مشتق توابع کسری به صورت مقابل است:

$$y=\frac{u}{v}$$
$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

از تابع مشتق می‌گیریم:

$$y'=\frac{\frac{2(2x+7)}{3\sqrt[3]{(x^2+7x)}}\times(\sqrt{x}+1)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\sqrt[3]{(x^2+7x)^2}}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$x=1\Rightarrow y'=\frac{\frac{18}{6}\times 2-\frac{1}{2}\times 4}{4}=1$$

مشتق توابع رادیکالی به فرم کلی به صورت زیر است:

$$y=\sqrt[n]{u^m}\Rightarrow y'=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۸۸)*

---

**58– گزینهٔ «۳»** *(کتاب جامع آبی)*

$$r'(x)=g'(x)\times f'(g(x))$$
$$r'(4)=g'(4)\times f'(g(4))$$
$$g(x)=\begin{cases}4 & x\le 2\\ \frac{x}{2}+3 & x>2\end{cases}\ :\ g'(4)=\frac{1}{2}\ \text{و}\ g(4)=5$$

اما

$$\Rightarrow r'(4)=\frac{1}{2}\times f'(5)$$

$f'(5)=\frac{5}{4}$ است، بنابراین:

$$r'(4)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}=\frac{5}{8}$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌ی ۸۷ و صفحه‌ی ۹۲- مکمل تمرین ۱۱))*

---

**59– گزینهٔ «۲»** *(احسان کریمی)*

ابتدا با مشتق‌گیری از معادلهٔ مکان زمان، معادلهٔ سرعت زمان متحرک را پیدا می‌کنیم که به معادلهٔ $S'(t)=-8t+12$ می‌رسیم. سرعت متحرک در لحظهٔ $t=0$ به صورت $S'(0)=0+12=12$ محاسبه می‌شود. ۲ برابر قرینهٔ سرعت متحرک در این لحظه یعنی این که سرعت متحرک $-24$ شود. با قرار دادن عدد $-24$ به جای $S'(t)$، لحظه‌ای را که سرعت متحرک $-24$ شده است، پیدا می‌کنیم:

$$-24=-8t+12\to -36=-8t\to t=\frac{-36}{-8}=\frac{9}{2}$$

حال کافی است مکان متحرک را در لحظهٔ $t=\frac{9}{2}$ تعیین کنیم:

$$S(\frac{9}{2})=-4(\frac{9}{2})^2+12(\frac{9}{2})+1=-81+54+1=-26$$

مکان اولیهٔ متحرک با قرار دادن $t=0$ در معادلهٔ مکان زمان به دست می‌آید که برابر با $S(0)=1$ خواهد بود. بنابراین اختلاف مکان اولیه و مکان به دست آمده ۲۷ واحد می‌شود.

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۳ تا ۱۰۰)*

---

**60– گزینهٔ «۲»** *(محمدابراهیم توزنده‌جان)*

ابتدا شیب خط به معادلهٔ $\frac{y-1}{3}+\frac{2x+1}{4}=-1$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{y}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2x}{4}+\frac{1}{4}=-1\Rightarrow\frac{y}{3}+\frac{x}{2}=-\frac{11}{12}$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط}=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}$$

از آنجا که خط مماس بر منحنی f در $x=k$ عمود بر خط فوق می‌باشد، پس شیب آن قرینه و معکوس عدد $-\frac{3}{2}$ یعنی برابر $\frac{2}{3}$ خواهد بود، به عبارتی $f'(k)=\frac{2}{3}$ است و داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(k+4h)-f(k)}{3h}=(\frac{4-0}{3})f'(k)=\frac{4}{3}(\frac{2}{3})=\frac{8}{9}$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۶)*

---

**61– گزینهٔ «۴»** *(مهدی براتی)*

دامنهٔ تابع f، به‌صورت $(-3,+\infty)-\{3\}$ است. تابع f در ریشهٔ مخرج یعنی $x=3$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

هم‌چنین تابع در ریشه‌های سادهٔ داخل قدر مطلق مشتق‌پذیر نیست:

$$2x^2-6x+4=0\Rightarrow 2(x-1)(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=2\end{cases}$$

در ضابطهٔ پایین هم در $x=-2$ تابع مماس قائم دارد و مشتق‌ناپذیر است. در نقطهٔ $x=-1$ که مرز دو ضابطه است، باید پیوستگی و مشتق‌پذیری بررسی شود:

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{|2x^2-6x+4|}{x-3}=\frac{12}{-4}=-3$$

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}[x-1]\sqrt[3]{x+2}=[-2^-]=-3$$
$$f(-1)=-2$$

در $x=-1$ نیز ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

بنابراین تابع f در بازهٔ $(-3,+\infty)$ در ۵ نقطهٔ مشتق‌ناپذیر است.

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۲)*

---

**62– گزینهٔ «۳»** *(حسن اسماعیلی)*

حاصل حد به‌صورت زیر تبدیل به تعریف مشتق می‌شود.

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1-h)-f(1)-(f(1+h)-f(1))}{5h}$$
$$=\frac{1}{5}(\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h})$$
$$=\frac{1}{5}(-f'_+(1)-f'_-(1))=\frac{1}{5}(-\frac{1}{12}+8)=\frac{19}{12}$$

مقادیر $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ بصورت زیر بدست آمدند:

$$f'_+(1)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+7)^2}}=\frac{1}{12}$$

$$f'_-(1)=\frac{-2}{(2-\frac{3}{2})^2}=-8$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۹۲)

---

**63– گزینهٔ «۲»** (سوند ولی‌زاده)

$$f(x)=[\frac{3}{2}x]\sqrt{4(x-2)^2+(x-2)^2}=[\frac{3}{2}x]\sqrt{5(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{5}[\frac{3}{2}x]\,|x-2|\xrightarrow{x\to 2^-}\sqrt{5}[3^-]\,|x-2|$$

$$\Rightarrow f(x)=2\sqrt{5}(-x+2)\xrightarrow{\text{مشتق}}f'(x)=-2\sqrt{5}$$

$$f'_-(2)=-2\sqrt{5}\rightarrow \text{جواب}=\frac{f'-(2)}{\sqrt{5}}=\frac{-2\sqrt{5}}{5}=-2$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

---

**64– گزینهٔ «۴»** (میلاد منصوری)

از فرض مسئله $f(1)=4$ به‌دست می‌آید. از طرفی داریم:

$$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)\Rightarrow g'(1)=2f(1)+f'(1)$$
$$\Rightarrow 5=8+f'(1)\Rightarrow f'(1)=-3$$

از طرفی $g(1)=f(1)+2=6$ است. بنابراین داریم:

$$(\frac{g(x)}{f(x)})'=(\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f^2(x)})\xrightarrow{x=1}\frac{5\times 4-6\times(-3)}{16}$$
$$=\frac{38}{16}=\frac{19}{8}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۸۷)

---

**65– گزینهٔ «۱»** (فهیمه ولی‌زاده)

$$f(x)=\sqrt{2x+3}$$
$$u=xf(x)\Rightarrow u'=(x)'f(x)+(x)f'(x)\Rightarrow u'=f(x)+xf'(x)$$
$$y=f(\underbrace{xf(x)}_{u})\Rightarrow y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u)$$
$$\Rightarrow y'=(f(x)+xf'(x))f'(xf(x))$$
$$f(x)=\sqrt{2x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$
$$y'=(\sqrt{2x+3}+x(\frac{1}{\sqrt{2x+3}}))f'(xf(x))$$
$$=(\sqrt{2x+3}+x(\frac{1}{\sqrt{2x+3}}))(\frac{1}{\sqrt{2(xf(x))+3}})$$
$$=(\sqrt{2x+3}+x(\frac{1}{\sqrt{2x+3}}))(\frac{1}{\sqrt{2(x\sqrt{2x+3})+3}})$$
$$\xrightarrow{x=1}(\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}})(\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{5}+3}})$$
$$\Rightarrow(\frac{5+1}{\sqrt{5}})(\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{5}+3}})=(\frac{6}{\sqrt{5}})(\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{5}+3}})=\frac{6}{\sqrt{10\sqrt{5}+15}}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۸۷)

---

**66– گزینهٔ «۱»** (بهرام ملاج)

ابتدا با بررسی دقیق‌تر عبارت خواسته شده داریم:

$$1-\frac{f.f''}{(f')^2}=\frac{(f')^2-ff''}{(f')^2}=(\frac{f}{f'})'$$

پس داریم:

$$f'(x)=\frac{17}{(5x+1)^2}\Rightarrow\frac{f}{f'}=\frac{\frac{2x-3}{5x+1}}{\frac{17}{(5x+1)^2}}=\frac{1}{17}(2x-3)(5x+1)$$
$$=\frac{1}{17}(10x^2-13x-3)$$
$$\xrightarrow{\text{مشتق}}(\frac{f}{f'})'=\frac{1}{17}(20x-13)\xrightarrow{x=1}\frac{7}{17}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۹۲)

---

**67– گزینهٔ «۱»** (علی ساوجی)

طبق فرض $A(1,1)$ و $B(a,a^3)$؛ لذا آهنگ متوسط $y=x^3$ در $(a,1)$ برابر است با:

$$\frac{f(1)-f(a^3)}{1-a}=\frac{1-a^3}{1-a}=a^2+a+1$$

طول نقطهٔ وسط بازهٔ $(a,1)$ برابر $\frac{a+1}{2}$ است. در نتیجه آهنگ لحظه‌ای $f(x)=x^3$ در $x=\frac{a+1}{2}$ عبارت است از:

$$f'(\frac{a+1}{2})=3(\frac{a+1}{2})^2$$

بنابراین:

$$a^2+a+1=4(3(\frac{a+1}{2})^2)=3a^2+6a+3$$
$$\Rightarrow 2a^2+5a+2=0\Rightarrow a=-2,a=-\frac{1}{2}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۳ تا ۱۰۰)

---

**68– گزینهٔ «۱»** (نیما کریوریان)

محاسبهٔ حد چپ:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x[x]+x[-x]}{\sqrt{x+9}-3}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{\sqrt{x+9}-3}=\frac{0}{0}$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{\sqrt{x+9}-3}\times\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}=\frac{-x(\sqrt{x+9}+3)}{x}=-6$$

محاسبهٔ حد راست:

$$\lim_{x\to 0^+}a\sin(\frac{\pi a(x+3)}{6})-3=a\sin(\frac{\pi a}{2})-3$$

با توجه به شرط پیوستگی، حد چپ و راست در $x=0$ باید برابر باشند.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)\Rightarrow a\sin(\frac{\pi a}{2})-3=-6$$
$$\Rightarrow a\sin(\frac{\pi a}{2})=-3\Rightarrow\sin(\frac{\pi a}{2})=\frac{-3}{a}$$

حال می‌توان از گزینه‌ها استفاده کرد و از آن‌جایی‌که صورت سوال مقدار $\frac{a+1}{a}=1+\frac{1}{a}$ را می‌خواهد، در ابتدا از مقدار گزینه‌ها یک واحد کم کرده و سپس معکوس می‌کنیم تا مقدار a مشخص گردد. تساوی مشخص شده به ازای $a=3$ برقرار است. $1+\frac{1}{a}=\frac{4}{3}\rightarrow a=3\Rightarrow\sin(\frac{3\pi}{2})=\frac{-3}{3}=-1$

(ترکیبی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۴۲) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳)

---

**69– گزینهٔ «۱»** *(محمدحسن سلامی‌حسینی)*

$$R=f(-2)=-8+8+6+a=a+6$$

$$f(x)=(x+2)g(x)+(a+6)\ ,\ f(-1)=g(-1) \quad ①$$

پس:

$$f(-1)=(-1+2)g(-1)+a+6\Rightarrow f(-1)=g(-1)+a+6\xrightarrow{①}a+6=0$$

$$\Rightarrow a=-6\rightarrow f(\frac{a}{3})=f(-2)=-8+8+6-6=0$$

*(حد بی نهایت و حد در بی نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)*

---

**70– گزینهٔ «۴»** *(سیدجواد نظری)*

با جایگذاری $h$ در عبارت بدست می‌آوریم:

$$f(-1)=2 \qquad \lim_{h\to-\infty} f(\frac{1}{h}-1)=0$$

$$\lim_{h\to-\infty} h(f(\frac{1}{h}-1)-f(-1))=\lim_{h\to-\infty}-2h=+\infty$$

تابع $f$ در $x=-1$ پیوستگی چپ ندارد زیرا:

$$f(-1)=2 \qquad \lim_{x\to(-1)^-} f(a)=0$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۸)*

---

**71– گزینهٔ «۲»** *(فرشار رضازاده)*

اعداد صحیح در این بازه شامل $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ هستند. تابع $[\frac{x}{2}]-[\frac{x}{3}]$ در جایی که $\frac{x}{2}$ و $\frac{x}{3}$ هر دو صحیح هستند و یا هیچکدام صحیح نیستند، پیوسته و مشتق‌پذیر است. بنابراین در $x=2,3,4,8,9$ مشتق ندارد ولی در $x=1,5,6,7$ مشتق‌پذیر است. در $x=8$ نیز به دلیل وجود $(x-8)^2$ مشتق‌پذیر خواهد بود، بنابراین این تابع در $x=1,5,6,7,8$ مشتق دارد. *(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)*

---

**72– گزینهٔ «۱»** *(سیار راوطلب)*

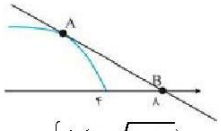
$$y=\frac{1}{f}\rightarrow y'=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}\Rightarrow\begin{cases}y'_+(a)=\dfrac{-f'_+(a)}{f^2(a)}=+\infty\\ y'_-(a)=\dfrac{-f'_-(a)}{f^2(a)}=-\infty\end{cases}$$

با توجه به مشتق چپ و راست $y=\frac{1}{f}$، گزینه «۱» صحیح است.

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۲)*

---

**73– گزینهٔ «۴»** *(جهانبخش نیکنام)*




نقطهٔ $A$ را به صورت $(\alpha,\sqrt{4-\alpha})$ فرض می‌کنیم.شیب خط مماس را که از دو نقطهٔ $A$ و $B$ می‌گذرد، بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases}A(\alpha,\sqrt{4-\alpha})\\ B(8,0)\end{cases}\Rightarrow m_{AB}=\frac{\sqrt{4-\alpha}}{\alpha-8}$$

$$m_{AB}=f'(\alpha)=\frac{-1}{2\sqrt{4-\alpha}}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{4-\alpha}}{\alpha-8}=\frac{-1}{2\sqrt{4-\alpha}}\Rightarrow 8-\alpha=2(4-\alpha)\Rightarrow\alpha=0\Rightarrow A(0,2)$$

پس فاصلهٔ $A$ تا مبدأ مختصات برابر با ۲ می‌باشد.

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)*

---

**74– گزینهٔ «۳»** *(عباس اشرفی)*

برای بدست آوردن $f'(1)$، کافی است از عامل صفرشونده یعنی $(x-1)$، مشتق بگیریم:

$$f'(x)\big|_{x=1}=(x-1)'\frac{(x+1)}{\sqrt{x^3+3}}\rightarrow f'(1)=\frac{2}{\sqrt{4}}=1$$

شیب خط مماس، برابر مقدار مشتق است و در واقع همان تانژانت زاویهٔ بین خط و جهت مثبت محور طول‌ها است. $\tan x=1\rightarrow x=45^\circ$

*(مشتق) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۴۰ و ۴۱) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۸)*

---

**75– گزینهٔ «۳»** *(سروش موئینی)*

$x+3y+4=0$ در $x=-1$ بر $f$ مماس است، پس:

$$\begin{cases}f(-1)=-1\\ f'(-1)=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{1}{f(f(-x))}\Rightarrow g'(x)=$$

$$-\frac{-(f(-x))'f'(f(-x))}{(f(f(-x)))^2}=\frac{f'(-x)f'(f(-x))}{(f(f(-x)))^2}$$

$$\Rightarrow g'(1)=\frac{-\frac{1}{3}\times-\frac{1}{3}}{(-1)^2}=\frac{1}{9}$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۸)*

---

**76– گزینهٔ «۳»** *(بهرام صلاح)*

برای یافتن آهنگ لحظه‌ای در $x=3$ داریم:

$$f'(x)=100\times2\times\frac{-1}{10}\times(1-\frac{x}{10})=-20(1-\frac{x}{10})\Rightarrow f'(3)=-14$$

به این نکته توجه می‌کنیم که آهنگ متوسط تغییرات یک‌سهمی در یک بازه با آهنگ لحظه‌ای در وسط بازه برابر است. پس به جای یافتن آهنگ متوسط در بازهٔ $[-0/8,4/8]$ آهنگ لحظه‌ای را در $x=2$ می‌یابیم:

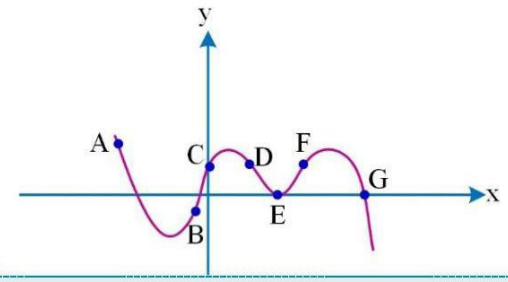
$$f'(2)=-20\times0/8=-16\Rightarrow \text{اختلاف}=2$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۳ تا ۱۰۰)*

www.mapedu.ir

# اختلال یادگیری

1 - با توجه به نمودار تابع f، چه تعداد از روابط داده شده، درست است؟




الف) $f'(x_A).f'(x_E)<0$

ب) $f'(x_D)+f'(x_G)>0$

پ) $\dfrac{f(x_A)-f(x_D)}{f'(x_G)}>0$

ت) $f'(x_C)-f(x_B)>0$

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳- صفحه ۶۶ تا ۷۶- متوسط)

**هرتست ماز یک کلاس درس!**

اگر عرض نقطه‌ای، بالای محور x ها واقع شده باشد در آن نقطه $f>0$ است. اگر عرض نقطه‌ای، پایین محور x ها واقع شده باشد در آن نقطه $f<0$ است و در نقاط تلاقی با محور x ها $f=0$ است.

اگر شیب خط مماس بر نقطه‌ای با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ حاده بسازد، در آن نقطه $f'>0$ است. اگر شیب خط مماس بر نقطه‌ای با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ منفرجه بسازد در آن نقطه $f'<0$ است و اگر شیب خط مماس بر نمودار در نقطه‌ای، موازی محور x ها باشد در آن نقطه $f'=0$ است.

**به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:**

الف) $f'(x_A)<0\ ,\ f'(x_E)=0 \Rightarrow f'(x_A)f'(x_E)=0$

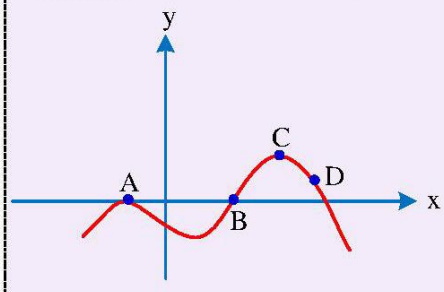
ب) $f'(x_D)<0\ ,\ f'(x_G)<0 \Rightarrow f'(x_D)+f'(x_G)<0$

پ) $f(x_A)>0\ ,\ f(x_D)>0\ ,\ f'(x_G)<0\ ,\ f(x_A)>f(x_D) \Rightarrow f(x_A)-f(x_D)>0 \Rightarrow \dfrac{f(x_A)-f(x_D)}{f'(x_G)}<0$

ت) $f'(x_C)>0\ ,\ f(x_B)<0 \Rightarrow f'(x_C)>f(x_B) \Rightarrow f'(x_C)-f(x_B)>0$

پس فقط عبارت (ت) درست است.

**سوالات منتخب:**



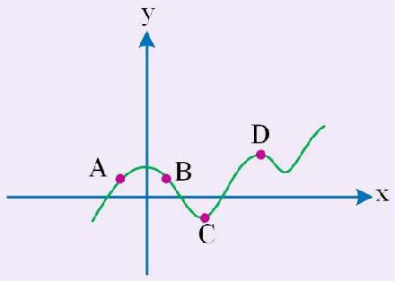

۱- با توجه به نمودار تابع f کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) در نقطه A مقدار تابع و مقدار مشتق صفر است.

۲) در نقطه B مقدار تابع برابر صفر و مقدار مشتق مثبت است.

۳) در نقطه C مقدار تابع مثبت و مقدار مشتق صفر است.

۴) در نقطه D مقدار تابع و مقدار مشتق مثبت است. ✓




۲- در چه تعداد از نقاط مشخص شده روی نمودار تابع f، مقدار تابع مثبت و مقدار مشتق منفی است؟

۱) صفر

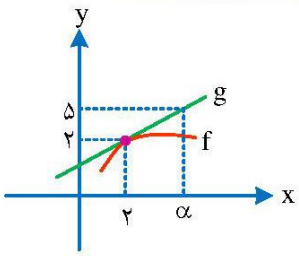
۲) ۱ ✓

۳) ۲

۴) ۳

گروه آموزشی ماز

2 - با توجه به شکل مقابل اگر $f'(2)=3$ باشد، حاصل $gog(\alpha)$ کدام است؟




۱) ۵

۲) ۹

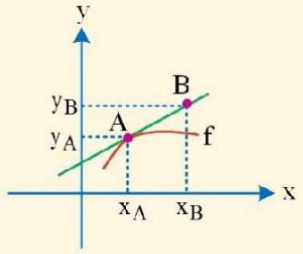
۳) ۱۱

۴) ۷

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳- صفحه ۶۶ تا ۷۶- متوسط)

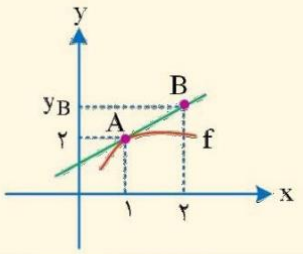
**هرتست ماز یک کلاس درس!**

اگر مطابق شکل، نقطهٔ B بر روی خط مماس بر تابع $f(x)$ در نقطهٔ A قرار داشته باشد، داریم:




$$\text{شیب خط مماس} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m_{AB}$$

**مثال:** اگر در نمودار زیر، شیب خط مماس بر آن در نقطه $x = ۱$ برابر ۲ باشد، $y_B$ را بدست آورید.




$$\frac{y_B - ۲}{۲ - ۱} = ۲ \Rightarrow y_B = ۴$$

با توجه به آن که نقطه به طول $x = \alpha$ بر روی خط مماس بر تابع f در نقطه به طول $x = ۲$ قرار دارد، داریم:

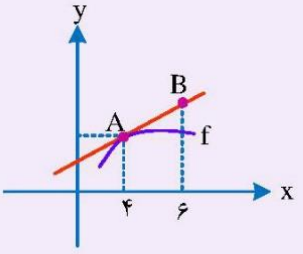
$$f'(۲) = \frac{f(\alpha) - f(۲)}{\alpha - ۲} \Rightarrow ۳ = \frac{۵ - ۲}{\alpha - ۲} \Rightarrow \alpha - ۲ = ۱ \Rightarrow \alpha = ۳$$

پس با توجه به نمودار، $g(\alpha) = ۵$ است. حال می‌خواهیم $g(g(\alpha))$، یعنی $g(۵)$ را بدست بیاوریم. پس با توجه به آن که شیب خط برابر ۳ است داریم:

$$۳ = \frac{g(۵) - g(۲)}{۵ - ۲} \Rightarrow ۳ = \frac{g(۵) - ۲}{۳} \Rightarrow g(۵) = ۱۱$$

**سوالات منتخب:**

۱- با توجه به شکل مقابل اگر $f(۴) = ۳$ و $f'(۴) = ۲$ باشد، عرض نقطهٔ B کدام است؟



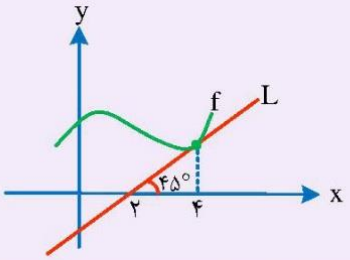

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷ ✓

۲- نمودار تابع f به صورت مقابل است. مقدار $f(۴) + f'(۴)$ کدام است؟




۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳ ✓

۴) ۴

3 - اگر $f(x)=\left[-\frac{5}{x}\right]\left|x^2-3x\right|$، مقدار $f'(2)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲− ۳) ۳− ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳- متوسط)

$$\lim_{x\to 2}\left[-\frac{5}{x}\right]=\left[-2/5\right]=-3$$

$$\left|x^2-3x\right|=\begin{cases}x^2-3x & x\ge 3\ ,\ x\le 0\\ -x^2+3x & 0<x<3\end{cases}$$

$$f(x)=-3(-x^2+3x)=3x^2-9x$$

$$f'(x)=6x-9\rightarrow f'(2)=6(2)-9=3$$

4 - اگر $f(2)=3f'(2)=6$، مقدار مشتق تابع $\left(\frac{f+1}{f^2}\right)$ به ازاء $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{27}$ ۲) $-\frac{2}{27}$ ۳) $\frac{1}{27}$ ۴) $-\frac{1}{27}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳- ساده)

**هرتست ماز یک کلاس درس!**

مشتق $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)\times g(x)-f(x)\times g'(x)}{(g(x))^2}$

مشتق $(f(x))^n=nf'(x)\times(f(x))^{n-1}$

$f(2)=6$

$f'(2)=2$

$$y=\frac{f+1}{f^2}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f^2}\xrightarrow{\text{مشتق گیری}}y'(2)=\frac{-f'(2)}{(f(2))^2}+\frac{-2f(2)\times f'(2)}{(f(2))^4}=\frac{-2}{(6)^2}+\frac{-2(6)\times(2)}{(6)^4}=\frac{-2}{27}$$

**سوالات منتخب:**

اگر $4f(a)=f'(a)=2$، مقدار مشتق عبارت $\frac{f^3(x)+1}{f(x)}$ در نقطهٔ $x=a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶− ✓ ۳) ۶ ۴) ۲−

گروه آموزشی ماز

5 - اگر $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{4-9x^2}}$ مقدار $f'_-(0)$ کدام است؟

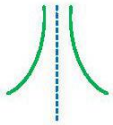
۱) ۳ ۲) ۲− ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

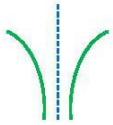
پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳- ساده)

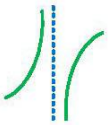
$$f(x)=\sqrt{2-\sqrt{4-9x^2}}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{4-9x^2}}}{\sqrt{2+\sqrt{4-9x^2}}}=\frac{\sqrt{9x^2}}{\sqrt{2+\sqrt{4-9x^2}}}=\frac{|3x|}{\sqrt{2+\sqrt{4-9x^2}}}$$

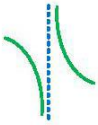
$$f'_-(0)=(|3x|)'\times\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{4-9x^2}}}=-3\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

6 - نمودار مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+|x|$ در مجاورت $x=0$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳- متوسط)

**هر تست ماز یک کلاس درس!**

برای بررسی نمودار مشتق تابع $f$ در نقطه $a$ دقت کنید که حتماً باید حد مشتق چپ و راست در $x=a$ مورد بررسی قرار بگیرد. پس تابع مشتق را نوشته و حد چپ و راست تابع مشتق را در نقطه موردنظر بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to a^-} f'(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+|x|}=\sqrt[3]{|x|(|x|+1)}=\underbrace{\sqrt[3]{|x|}}_{g(x)}\times\underbrace{\sqrt[3]{|x|+1}}_{h(x)}$$

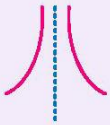
دقت کنید فقط از عامل صفرشونده مشتق می‌گیریم:

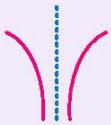
$$(gh)'(x)=g'(x)\times h(x)$$

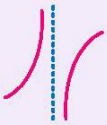
$$(gh)'(0)=g'(0)\times\underbrace{h(0)}_{1}\rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} g'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{3\sqrt[3]{x^2}}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} g'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=+\infty\end{cases}$$

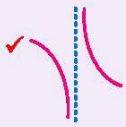
**سوالات منتخب:**

اگر $f(x)=\sqrt{|x|}$ باشد، نمودار $f'$ در مجاورت $x=0$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

گروه آموزشی ماز

7 - هرگاه $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^3(x)-1}{x^3-1}=6$ و $f$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، مقدار مشتق تابع $y=fof$ در $x=1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۳۶ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳- ساده)

**هر تست ماز یک کلاس درس!**

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\left(f(g(x))\right)'=g'(x)f'(g(x))$$

اتحاد چاق و لاغر
$$\begin{cases}(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)\\(a^3+b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)\end{cases}$$

در حد داده شده، مخرج کسر به ازای $x=1$ برابر صفر می‌شود، اما چون حاصل حد عدد حقیقی است، بنابراین صورت کسر هم باید به ازای $x=1$ برابر صفر شود که پس از رفع ابهام $\left(\frac{0}{0}\right)$، حاصل حد برابر عدد حقیقی ۶ شود، پس: $f^3(1)-1=0\Rightarrow f(1)=1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^3(x)-1}{x^3-1}=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\overset{f(1)}{1}}{x-1}}_{f'(1)}\times\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)+f(x)+1}{x^2+x+1}=6$$

$$f'(۱)\times\frac{(۱)^۲+(۱)+۱}{(۱)^۲+۱+۱}=۶\rightarrow f'(۱)=۶\ ,\ f(۱)=۱$$

$$\left(fof(۱)\right)'=f'(۱)\times f'\left(f(۱)\right)=۶\times۶=۳۶$$

**سوالات منتخب:**

اگر $\lim\limits_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x^۲-۴}=۳$ ، حاصل مشتق تابع $f\left(\sqrt{x+۳}\right)$ به ازاء $x=۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) ۳ ✓ ۴) ۱

www.biomaze.ir

**8 - تابع f با ضابطه $f(x)=۲x^۳+ax^۲+bx$ مفروض است، هرگاه $g(x)=\begin{cases}xf(x) & x>۱\\ f'(x) & x\le۱\end{cases}$ در $x=۱$ دارای مشتق باشد، مقدار b کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳- متوسط)

**هرتست ماز یک کلاس درس!**

در توابع دو ضابطه‌ای، شرط مشتق‌پذیری در نقاط مرزی آن است که تابع در آن نقاط مرزی پیوسته باشد و مشتق چپ و راست نیز برابر باشند.

$f'(x)=۶x^۲+۲ax+b$

۱) $g(۱^+)=g(۱^-)\Rightarrow ۲+a+b=۶+۲a+b\Rightarrow a=-۴$

۲) $g'_+(۱)=g'_-(۱)$

$f(۱)+f'(۱)=f''(۱)$

$۲+a+b+۶+۲a+b=۱۲+۲a\rightarrow b=۴$

**سوالات منتخب:**

تابع $f(x)=\begin{cases}ax^۲+۳x & x\le۱\\ ۳x^۳+b & x>۱\end{cases}$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر است. حاصل ab کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۱۸ ۳) ۹ ✓ ۴) ۶

گروه آموزشی ماز

**9 - مماس‌های رسم شده بر نمودار تابع $f(x)=|x|\sqrt{x-a}$ در مبدأ مختصات بر هم عمود هستند، مقدار a کدام است؟**

۱) $-۱$ ۲) $-۲$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳- متوسط)

**هرتست ماز یک کلاس درس!**

برای بدست آوردن شیب خط مماس باید مشتق تابع را در نقطه موردنظر به دست آوریم.

$f'_+(a)=$ شیب خط مماس بر منحنی از سمت راست در نقطه $x=a$

$f'_-(a)=$ شیب خط مماس بر منحنی از سمت چپ در نقطه $x=a$

نکته: اگر خطی با شیب m بر خط دیگری با شیب $m'$ عمود باشد، داریم: $m\times m'=-۱$

تابع در $x=۰$ پیوسته است و در یک همسایگی آن داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x\sqrt{x-a} & x\ge۰\\ -x\sqrt{x-a} & x<۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\sqrt{x-a}+\frac{x}{۲\sqrt{x-a}} & x>۰\\ -\sqrt{x-a}+\frac{-x}{۲\sqrt{x-a}} & x<۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(۰)=\sqrt{-a}\\ f'_-(۰)=-\sqrt{-a}\end{cases}$$

$$\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=-۱\Rightarrow-(-a)=-۱\Rightarrow a=-۱$$

www.mapedu.ir

سوالات منتخب:

مماس چپ و راست تابع $f(x)=|x|(x+a)$ در نقطه $x=0$ بر هم عمودند، مجموعه مقادیر $a$ کدام است؟

۱) $\{-1\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{-1,1\}$ ✓ ۴) $\varnothing$

www.biomaze.ir

10 - مقدار مشتق تابع $f(x)=(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-2x)^4$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{-7}{3}$ ۳) $\frac{-28}{3}$ ۴) $\frac{28}{3}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳- ساده)

**هر تست ماز یک کلاس درس!**

$$\left(f^n(x)\right)' = n\times f'(x)\times f^{n-1}(x)$$

در بسیاری از عبارات رادیکالی، به منظور آسان‌تر شدن محاسبهٔ مشتق، بهتر است عبارت را به صورت توان‌دار، (توان گویا) نوشته و سپس با استفاده از فرمول بالا از آن مشتق بگیریم.

تابع در $x=1$ پیوسته است.

$$f(x)=(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-2x)^4=(x^{-\frac{1}{3}}-2x)^4$$

$$f'(x)=4\times(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-2x)^3\times(-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}-2)$$

$$f'(1)=4\times(1-2)^3\times(-\frac{1}{3}-2)=\frac{28}{3}$$

سوالات منتخب:

مقدار مشتق تابع $y=\frac{1}{\sqrt{2x^2+4}}$ در $x=2$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۳) $-\frac{\sqrt{3}}{18}$ ✓ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{18}$

گروه آموزشی ماز

11 - با فرض $f(x)=x^2+\frac{4}{x}$، آهنگ تغییر متوسط تابع $f$ بر بازه $[1,4]$، $\frac{4}{3}$ برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f$ در $x=\alpha$ است. مقدار $\alpha$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳- ساده)

**هر تست ماز یک کلاس درس!**

✓ آهنگ تغییر متوسط یک تابع در بازه‌ای مانند $[a,b]$ برابر است با: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

✓ آهنگ تغییر لحظه‌ای یک تابع در نقطه $a$ برابر است با: $f'(a)$

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{4}{3}f'(\alpha)\Rightarrow\frac{17-5}{3}=\frac{4}{3}(2\alpha-\frac{4}{\alpha^2})$$

$$\alpha-\frac{2}{\alpha^2}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2\alpha^3-3\alpha^2-4=0\Rightarrow\alpha=2$$

www.mapedu.ir

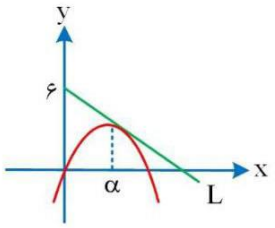
**سوالات منتخب:**

اگر $f(x)=2x-\frac{3}{x}$ باشد، آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[1,3]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در کدام نقطه برابر است؟

۱) $1+\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ✓ ۴) هیچ نقطه

www.biomaze.ir

**12 - سهمی $f(x)=4x-x^2$ و خط L در شکل مقابل رسم شده است. اگر خط L در نقطه‌ای به طول $x=\alpha$ بر نمودار سهمی مماس باشد، مقدار $f(\alpha)$ کدام است؟**




۱) $4\sqrt{6}-6$

۲) $2\sqrt{6}-6$

۳) $4\sqrt{6}+6$

۴) $2\sqrt{6}+6$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳- متوسط)

**هرتست ماز یک کلاس درس!**

خط $f(x)$ بر سهمی $g(x)$ در نقطه a مماس است، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases}$$

معادلهٔ هر خط به شکل $f(x)=ax+b$ است که به a شیب خط و به b عرض از مبدأ آن خط می‌گویند.

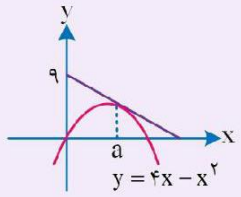
$$f(x)=4x-x^2 = \underbrace{kx}_{k<0}+6 \Rightarrow \begin{cases} f'(\alpha)=k \to 4-2\alpha=k \ (I) \\ f(\alpha)=g(\alpha) \to 4\alpha-\alpha^2=k\alpha+6 \Rightarrow \alpha^2+(k-4)\alpha+6=0 \to \Delta=(k-4)^2-24=0 \begin{cases} k-4=2\sqrt{6} \to k=4+2\sqrt{6} \ \times \\ k-4=-2\sqrt{6} \to k=4-2\sqrt{6} \end{cases} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(I)} 4-2\alpha=k \to 4-2\alpha=4-2\sqrt{6} \to \alpha=\sqrt{6}$$

$$\sqrt{6}) = 4\sqrt{6}-6$$

**سوالات منتخب:**

با توجه به شکل مقابل، مقدار a کدام است؟




۱) ۳ ✓

۲) ۵

۳) $\frac{11}{2}$

۴) ۶

گروه آموزشی ماز

**13 - تابع $f(x)=x^3-3x^2$ در بازه $[-3,0]$ تعریف شده است. آهنگ تغییر لحظه‌ای f را در $x=-3$ و $x=-1$ و $x=0$ به ترتیب $m_1$، $m_2$ و $m_3$ می‌نامیم. کدام گزینه صحیح است؟**

۱) $m_3<m_1<m_2$ ۲) $m_1<m_3<m_2$

۳) $m_1<m_2<m_3$ ۴) $m_3<m_2<m_1$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳- ساده)

**هر تست ماز یک کلاس درس!**

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=a$ برابر است با $f'(a)$.

www.mapedu.ir

$f'(x) = ۳x^۲ - ۶x$

$m_۱ = f'(-۳) = ۴۵$

$m_۲ = f'(-۱) = ۹ \Rightarrow m_۳ < m_۲ < m_۱$

$m_۳ = f'(۰) = ۰$

**سوالات منتخب:**

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = x^۳ - ۶x^۲ + x - ۱$ در کدام نقطه کمترین مقدار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ✓ ۳) ۳ ۴) ۴

www.biomaze.ir

**14 - دو منحنی $f(x) = x^۲ + ۳$ و $g(x) = ۳x^۲ + mx + ۱۱$ بر یکدیگر مماسند، طول نقطهٔ تماس کدام است؟**

۱) $\pm ۳$ ۲) $\pm ۸$ ۳) $\pm ۴$ ۴) $\pm ۲$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲- ساده)

**هر تست ماز یک کلاس درس!**

سهمی $f(x)$ و $g(x)$ بر هم مماس‌اند، برای بدست آوردن نقطه تماس به این شکل عمل می‌کنیم.

$$\underbrace{f(x) - g(x)}_{h(x)} = ۰$$

۱) اگر $h(x)$ ضابطه یک خط شد، معادله را حل می‌کنیم.

۲) اگر $h(x)$ ضابطه یک سهمی شد، حتماً باید $\Delta = ۰$ باشد.

$$x^۲ + ۳ = ۳x^۲ + mx + ۱۱ \Rightarrow ۲x^۲ + mx + ۸ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۰} m^۲ - ۶۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۸ \\ m = -۸ \end{cases}$$

$$x^۲ + ۳ = ۳x^۲ \pm ۸x + ۱۱ \Rightarrow ۲x^۲ \pm ۸x + ۸ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲$$

**سوالات منتخب:**

دو منحنی $f(x) = x^۲ - ۲x + ۳$ و $g(x) = ۵x^۲ + mx + ۴$ بر هم مماس‌اند، طول نقطه تماس کدام است؟

۱) ۶- و ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$ ✓ ۳) ۴- و ۴ ۴) ۲- و ۲

گروه آموزشی ماز

**15 - اگر $f(x) = ۲x^۲ - \frac{۱}{\sqrt{x}}$، مشتق تابع $f'of$ به ازای $x = ۱$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) $\frac{۱۱۷}{۴}$ ۳) $\frac{۱۱۷}{۸}$ ۴) $\frac{۵۷}{۸}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳- متوسط)

ابتدا $f'$ و $f''$ را بدست می‌آوریم:

$$f(x) = ۲x^۲ - x^{-\frac{۱}{۲}} \Rightarrow f'(x) = ۴x + \frac{۱}{۲}x^{-\frac{۳}{۲}} \Rightarrow f''(x) = ۴ - \frac{۳}{۴}x^{-\frac{۵}{۲}}$$

$$y = f'of(x) \Rightarrow y' = f'(x).f''(f(x))$$

$$\Rightarrow y'(۱) = f'(۱).f''(f(۱)) \Rightarrow y'(۱) = (۴ + \frac{۱}{۲}).f''(۱) = \frac{۹}{۲} \times (\frac{۱۳}{۴}) = \frac{۱۱۷}{۸}$$

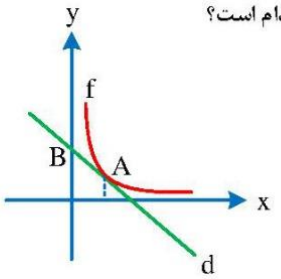
**سوالات منتخب:**

اگر $f(x) = ۲x^۳ - x^۲$، مقدار مشتق تابع $f'of$ در $x = ۱$ کدام است؟

۱) ۴۰ ✓ ۲) ۱۶ ۳) ۵۰ ۴) ۳۶

www.mapedu.ir

16 - در شکل مقابل، خط d در نقطهٔ A بر منحنی $f(x)=\frac{۱}{x^n}$ مماس است. اگر $y_B=۳y_A$ باشد، مقدار طبیعی n کدام است؟




۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳- متوسط)

**هر تست ماز یک کلاس درس!**

خط $f(x)$ بر سهمی $g(x)$ در نقطه a مماس است، آنگاه داریم:

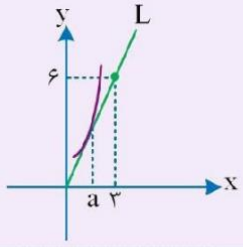
$$\begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases}$$

خط d را $g(x)$ فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} g(x)=kx+y_B \\ f(x)=\frac{۱}{x^n} \\ A(\alpha, y_A) \end{cases} \Rightarrow k=\frac{y_A-y_B}{\alpha}=\frac{-۲y_A}{\alpha}$$

$$\left.\begin{cases} f'(\alpha)=g'(\alpha)\to k=(\frac{۱}{x^n})'\to k=\frac{-n}{x^{n+۱}}\to\frac{-۲y_A}{\alpha}=\frac{-n}{\alpha^{n+۱}}\to ۲\alpha^n\times y_A=n\to\alpha^n\times y_A=\frac{n}{۲} \\ f(\alpha)=g(\alpha)\to y_A=\frac{۱}{\alpha^n}\to\alpha^n\times y_A=۱ \end{cases}\right\}\Rightarrow\frac{n}{۲}=۱\to n=۲$$

سوالات منتخب:




سهمی $y=۲x^۲+mx+۲$ و خط L مطابق شکل در نقطه $x=a$ برهم مماس‌اند، مقدار m کدام است؟

۱) ۲- ✓
۲) ۳-
۳) ۴
۴) ۶

گروه آموزشی ماز

17 - اگر $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{g(x)-g(۳)}{x^۲-۳x}=۲$ باشد، مقدار $(gof)'(۱)$ کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۳۶
۳) ۱۲
۴) ۴۸

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳- متوسط)

**هرتست ماز یک کلاس درس!**

۱) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

۲) $(fog)'(a)=g'(a)\times f'(g(a))$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{g(x)-g(۳)}{x-۳}\times\frac{۱}{x}=۲\Rightarrow\frac{g'(۳)}{۳}=۲\Rightarrow g'(۳)=۶$$

$$f(x)=x+۲\sqrt{x}\begin{cases} f(۱)=۳ \\ f'(x)=۱+\frac{۱}{\sqrt{x}}\to f'(۱)=۲ \end{cases}$$

$$(gof)'(۱)=f'(۱)\times g'(f(۱))=۲\times g'(۳)=۲\times۶=۱۲$$

www.mapedu.ir

18 - برای تابع پیوسته f، شرط $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{x^3-1}=\frac{-2}{3}$ برقرار است. هرگاه $(gof)'(1)=3$ باشد، مقدار $g'(-1)$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{2}{9}$ ۳) $-2$ ۴) $-\frac{1}{9}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته) اگر f در $x=\alpha$ مشتق‌پذیر باشد: $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$

نکته) اگر توابع f و g مشتق‌پذیر باشند: $(fog)'(\alpha)=g'(\alpha)f'(g(\alpha))$

با توجه به آن‌که $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=-\frac{2}{3}$ ، پس $f(1)=-1$ و به کمک آن:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{f'(1)}{3}=-\frac{2}{3}\Rightarrow f'(1)=-2$$

پس $f(1)=-1$ و $f'(1)=-2$، اکنون داریم، از طرفی:

$$(gof)'(1)=3\Rightarrow f'(1).g'(\underbrace{f(1)}_{-1})=3$$

$$\underbrace{f'(1)}_{-2}\ g'(-1)=3\Rightarrow g'(-1)=-\frac{3}{2}$$

گروه آموزشی ماز

19 - اگر $f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ باشد، مقدار $f'(2)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{7}{4}$ ۳) $\frac{7}{8}$ ۴) $\frac{11}{8}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته) $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$$f'(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}+\frac{3}{(x+2)^2}.\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}}.x$$

$$f'(2)=\frac{1}{2}+\frac{3}{16}\times\frac{1}{1}\times 2=\frac{7}{8}$$

www.biomaze.ir

20 - اگر $f'(1)=2$ و $f(1)=1$ باشد، مشتق تابع $f^2(\frac{1}{f(x)})$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $8$ ۲) $-8$ ۳) $2$ ۴) $-2$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته) اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند:

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

از مشتق تابع مرکب کمک می‌گیریم:

$$y=f^2(\frac{1}{f(x)})\Rightarrow y=(f^2o\frac{1}{f})(x)$$

$$\Rightarrow y'(1)=(\frac{1}{f})'(1)\times(f^2)'(\frac{1}{f(1)})\Rightarrow y'(1)=\frac{-f'(1)}{f^2(1)}\times 2f(\frac{1}{f(1)})\times f'(\frac{1}{f(1)})\Rightarrow y'(1)=\frac{-f'(1)}{(1)^2}\times 2f(1)\times f'(1)$$

$$\Rightarrow y'(1)=-2f'(1)f'(1)=-8$$

21 - هرگاه $f(x)=x^{۲}-\frac{۲}{x}$ باشد، مشتق تابع $f^{۲}of(x)$ به ازای $x=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۷۰۰}{۹}$ ۲) $\frac{۷۰۰}{۳}$ ۳) $\frac{۱۴۰۰}{۹}$ ۴) $\frac{۱۴۰۰}{۳}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته) اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند:

$$(fog)' = g'(x).f'(g(x))$$

$$y=f^{۲}(x) \Rightarrow y'(x)=۲f(x)f'(x)$$

$$y=f^{۲}of(x) \Rightarrow y'=f'(x).۲f(f(x)).f'(f(x))$$

دقت کنید $f(۲)=۳$ ، $f(۳)=\frac{۲۵}{۳}$ است و داریم:

$$f'(x)=۲x+\frac{۲}{x^{۲}} \Rightarrow f'(۲)=\frac{۹}{۲} \ , \ f'(۳)=\frac{۵۶}{۹}$$

پس:

$$y'(۲)=f'(۲)\times ۲f(۳)f'(۳)$$

$$y'(۲)=\frac{۹}{۲}\times ۲\times \frac{۲۵}{۳}\times \frac{۵۶}{۹}=\frac{۲۵\times ۵۶}{۳}=\frac{۱۴۰۰}{۳}$$

www.biomaze.ir

22 - هرگاه f تابعی یک‌به‌یک، $f(۱)=۱$ و $fof(x)=x^{۳}+\frac{۲}{x}$، مقدار $f'(۱)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته) اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند:

$$(fog)'(x) = g'(x).f'(g(x))$$

$$(fof)'(x) = f'(x).f'(f(x))$$

از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$(fof)'(x)=۳x^{۲}-\frac{۲}{x^{۲}}$$

$$f'(x).f'(f(x))=۳x^{۲}-\frac{۲}{x^{۲}}$$

$$x=۱ : f'(۱).f'(۱)=۱ \Rightarrow f'(۱)=\begin{cases} ۱ \\ -۱ \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

23 - تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ با دامنهٔ $[۰,۴]$ مفروض است. خط مماس بر f در نقطهٔ A با کدام طول به موازات وتری است که نقاط ابتدا و انتهای دامنهٔ تابع را به هم وصل می‌کند؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ دشوار)

نکته) شیب خط مماس بر تابع f در نقطه $x=\alpha$ همان $f'(\alpha)$ است.

$$M\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix}\right. \ , \ N\left|\begin{matrix} ۴ \\ ۶ \end{matrix}\right.$$

خطی که نقاط ابتدا و انتهای دامنه را به هم وصل می‌کند به موازات MN است.

$$m_{MN}=\frac{۶-۰}{۴-۰}=\frac{۳}{۲} \qquad f'(x)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

حال کافی است نقطه A روی نمودار f نقطه‌ای باشد که مشتق در آن نقطه $\frac{۳}{۲}$ باشد.

$$۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=۱$$

پس A دارای نقطه‌ای با طول $x=۱$ باشد $A(۱,۲)$

www.mapedu.ir

24 - با فرض $f(x)=2x+mx-3$ و $x\in[-1,\alpha]$، مقدار $\alpha$ کدام باشد تا آهنگ تغییر متوسط تابع، در بازهٔ داده شده، برابر آهنگ لحظه‌ای تابع $f(x)$ در $x=1$ باشد؟

۱) ۳ ۲) ۲/۵ ۳) ۲ ۴) ۳/۵

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته) در تابع درجه دوم، آهنگ تغییر متوسط در یک بازه، با آهنگ تغییر لحظه‌ای در وسط بازه برابر است.

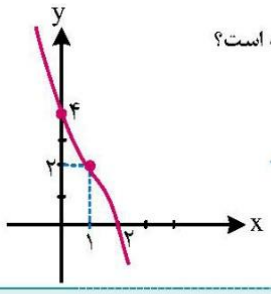
$$\bar{f}=\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(\alpha)-f(-1)}{\alpha+1}=f'(1)$$

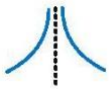
$$\frac{(2\alpha^2+m\alpha-3)-(2-m-3)}{\alpha+1}=4+m\Rightarrow\frac{2(\alpha^2-1)+m(\alpha+1)}{\alpha+1}=4+m$$

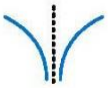
$$\Rightarrow\frac{\cancel{(\alpha+1)}(2\alpha-2+m)}{\cancel{\alpha+1}}=4+m\Rightarrow 2\alpha-2=4\Rightarrow\alpha=3$$

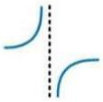
روش دوم: اگر $f$ تابعی درجه دوم باشد، آهنگ تغییر متوسط در بازه $[\alpha,\beta]$ با آهنگ تغییرلحظه‌ای در $\frac{\alpha+\beta}{2}$ برابر است. در واقع $x=1$ وسط بازه $[-1,\alpha]$ است، پس: $\alpha=3$

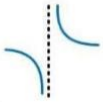
25 - اگر نمودار تابع $y=2f(x+1)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $g(x)=\frac{2x+3}{2x^2-f(x)}$ در اطراف $x=1$ چگونه است؟




۱) 

۲) 

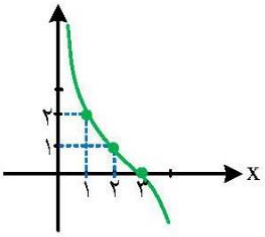
۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۳ تا ۵۷ ـ دشوار)

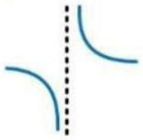
ابتدا نمودار $2f(x+1)$ را ۱ واحد در جهت محور xها به سمت راست منتقل کرده و عرض همهٔ نقاط را نصف می‌کنیم تا نمودار $f(x)$ حاصل شود.

حال با توجه به نمودار تابع $f$ در اطراف $x=1$ داریم:



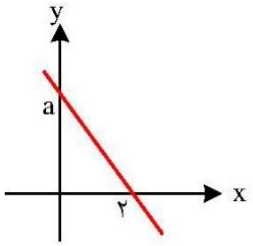

۱) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{2x+3}{2x^2-f(x)}=\frac{2+3}{2(1^+)-(2^-)}=\frac{5}{0^+}=+\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2x+3}{2x^2-f(x)}=\frac{2+3}{2(1^-)-2^+}=\frac{5}{0^-}=-\infty$



با توجه به نتایج بدست آمده از (۱) و (۲)، نمودار تابع $g$ در اطراف $x=1$ به صورت مقابل است.

26 - نمودار f به صورت مقابل است. به ازای کدام مقدار a تابع $g(x)=\begin{cases} fof^{-1}(x-1) & x\geq -1 \\ \frac{1}{2}f^{-1}(x^2+a) & x<-1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است؟




۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۳۷ تا ۱۴۲ ـ دشوار)

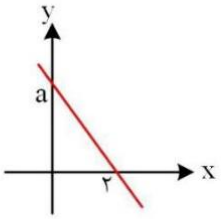
**هر تست ماز یک کلاس درس!**

در بعضی سوالات، ضابطهٔ یک تابع داده می‌شود به طوری که در آن یک یا چند پارامتر وجود دارد و از ما می‌خواهند که مقدار پارامترها را به گونه‌ای تعیین کنیم که تابع در یک نقطهٔ مشخص یا یک بازه، پیوسته باشد. در این سوالات باید با توجه به تعریف پیوستگی تابع، مقدار پارامترها را بیابیم.

مثال) برای این که تابع $f(x)=\begin{cases} 1 & ; x\leq 3 \\ 3x+a & ; x>3 \end{cases}$ در تمام اعداد حقیقی پیوسته باشد، باید در $x=3$ پیوسته باشد. پس:

$$\begin{cases} f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(3x+a)=9+a \end{cases} \Rightarrow 9+a=1 \Rightarrow a=-8$$

ابتدا با توجه به نمودار، ضابطهٔ توابع $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:




$$\Rightarrow f(x)=\frac{-a}{2}x+a \Rightarrow f^{-1}(x)=2(1-\frac{x}{a})$$

همچنین می‌دانیم $fof^{-1}(x-1)=x-1$ است، پس تابع $g(x)$ را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$g(x)=\begin{cases} x-1 & x\geq -1 \\ \frac{1}{2}(2(1-\frac{x^2+a}{a})) & x<-1 \end{cases} \Rightarrow g(x)=\begin{cases} x-1 & x\geq -1 \\ 1-\frac{x^2+a}{a} & x<-1 \end{cases}$$

از آن‌جایی که توابع چندجمله‌ای در $\mathbb{R}$ پیوسته هستند، پس برای آنکه $g(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، فقط کافی است در نقطه مرزی $x=-1$ پیوسته باشد، پس:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=g(-1)=-2 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} g(x)=1-\frac{1+a}{a} \end{cases} \Rightarrow 1-\frac{1+a}{a}=-2 \Rightarrow \frac{a+1}{a}=3 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

27 - هرگاه $f(x)=2-\frac{3}{x}$ و $g(x)=\frac{x+5}{2x+1}$، مشتق $y=fo(f-g)$ به ازای $x=1$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $4$ ۴) $-4$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته) $(fog)'(\alpha)=g'(\alpha).f'(g(\alpha))$

$y=fo(f-g) \Rightarrow y'(1)=(f'(1)-g'(1)).f'(f(1)-g(1))$

$f'(x)=\frac{3}{x^2} \quad f'(1)=3\ ,\ f(1)=-1$

$g'(x)=\frac{-9}{(2x+1)^2} \quad g'(1)=-1\ ,\ g(1)=2$

$y'(1)=(f'(1)-g'(1))f'(-3)$

$y'(1)=(3+1).f'(-1-2)=4f'(-3)=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

سوالات منتخب:

اگر $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\frac{3}{2}$ و $f(x)=\sqrt{5-x}$، مقدار $(gof)'(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ✓ ۳) $-\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{3}{4}$

گروه آموزشی ماز

28 - $f$ تابعی پیوسته است، به طوری‌که $\lim_{h\to 0}\frac{f(3x-2h)-f(3x)}{h}=\frac{1}{2x+1}$، مشتق $f(\frac{4x}{x-1})$ به ازای $x=-1$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{14}$ ۲) $\frac{3}{14}$ ۳) $\frac{1}{14}$ ۴) $-\frac{1}{15}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته) $f$ تابعی پیوسته باشد:

۱) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{h}=(m-n)f'(a)$

۲) $\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x)+mh)-f(g(x)+nh)}{h}=(m-n)f'(g(x))$

دقت کنید نکته دوم $g'(x)$ لازم ندارد.

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3x-2h)-f(3x)}{h}=-2f'(3x) \Rightarrow -2f'(3x)=\frac{1}{2x+1}$

پس $f'(3x)=\frac{-1}{4x+2}$، و در ادامه داریم:

$y=f(\frac{4x}{x-1}) \Rightarrow y'=\frac{-4}{(x-1)^2}f'(\frac{4x}{x-1}) \Rightarrow y'(-1)=\frac{-4}{4}f'(2)=-f'(2)$

پس برای یافتن $f'(2)$ در معادله $f'(3x)=\frac{-1}{4x+2}$، $x=\frac{2}{3}$ قرار می‌دهیم:

$y'(-1)=-1\times\frac{-3}{14}=\frac{3}{14}$

**29 -** هرگاه $f$ تابعی پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\quad}{x^2-1}=\frac{1}{2}$، به طوری که $(gof)'(1)=4$، مشتق $g(\frac{2}{x})$ به ازای $x=-1$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{8}{3}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته)

۱) $f'(a)$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $f$ پیوسته باشد.

۲) وقتی $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ موجود باشد و $g(a)=0$، باید $f(a)=0$ باشد.

۳) $(fog)'(a)=g'(a).f'(g(a))$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x^2-1}=\frac{3}{2}\Rightarrow f(1)=-2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x^2-1}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{f'(1)}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow f'(1)=3$$

از طرفی:

$$(gof)'(1)=4\Rightarrow f'(1)g'(\underbrace{f(1)}_{-2})=4\Rightarrow f'(1)g'(-2)=4\Rightarrow g'(-2)=\frac{4}{3}$$

$$y=g(\frac{2}{x})\Rightarrow y'=-\frac{2}{x^2}g'(\frac{2}{x})\Rightarrow y'(-1)=-2g'(-2)\Rightarrow y'(-1)=-2\times\frac{4}{3}=-\frac{8}{3}$$

سوالات منتخب:

اگر $f$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f^3(x)-1}{x^2-1}=-\frac{3}{4}$، مشتق تابع $fof$ به ازای $x=1$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{9}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ✔ ۴) $\frac{9}{4}$

گروه آموزشی ماز

**30 -** هرگاه $f(x)=(2x-3|x|)[-3x]$، حاصل $f'_+(0)-f'_-(0)$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) $-1$ ۳) ۴ ۴) $-4$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته) اگر تابعی شامل قدرمطلق یا جزء صحیح باشد، ابتدا وضعیت پیوستگی تابع را در نقطه $\alpha$ بررسی می‌کنیم. پس ضابطه $f$ را در همسایگی $\alpha$ بدون جزء صحیح و قدرمطلق مشخص می‌کنیم و مشتقات یکطرفه آن را بدست می‌آوریم.

ابتدا تابع را در همسایگی $x=0$ به یک تابع دو ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}(-x)(-1) & 0<x<\frac{1}{3}\\ (5x)(0) & -\frac{1}{3}<x<0\end{cases}$$

تابع در $x=0$ پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست به طوری‌که:

$$f'_+(0)=1,\ f'_-(0)=0\Rightarrow f'_+(0)-f'_-(0)=1$$

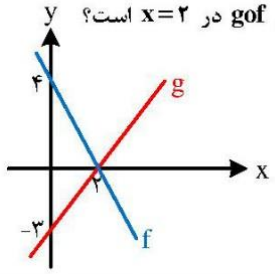
**سوالات منتخب:**

اگر $f(x)=[x]\left|x^{۲}-x-۲\right|$ مقدار $f'_{+}(-۲)-f'_{-}(۲)$ چه عددی است؟

۱) ۱۳ ✓ ۲) ۱۸ ۳) ۷ ۴) ۱۲

www.biomaze.ir

**31 -** نمودار توابع خطی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ مطابق شکل روبه‌رو است. مشتق $fog$ در $x=۲$ چند برابر مشتق $gof$ در $x=۲$ است؟




۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $-\frac{۴}{۳}$

۴) $-\frac{۴}{۹}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ ساده)

نکته ۱) $(fog)'(\alpha)=g'(\alpha)f'(g(\alpha))$

نکته ۲) مشتق تابع خطی، تابع ثابت است.

$$(fog)'(۲)=g'(۲)f'(\underbrace{g(۲)}_{۰})=g'(۲)f'(۰)$$

$$(gof)'(۲)=f'(۲).g'(\underbrace{f(۲)}_{۰})=g'(۰)f'(۲)$$

توجه کنید $f$ و $g$ توابع خطی هستند پس $f'$ و $g'$ توابع ثابت هستند. به همین جهت:

$$g'(۰)=g'(۲)=\text{شیب خط } g=\frac{۳}{۲}$$
$$f'(۰)=f'(۲)=\text{شیب خط } f=-۲$$
$$\Rightarrow \frac{g'(۲)f'(۰)}{f'(۲)g'(۰)}=۱$$

**سوالات منتخب:**

با توجه به شکل سوال ۵ مشتق $f.g$ در $x=۱$ چند است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) ۶ ✓ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $-۶$

گروه آموزشی ماز

**32 -** آهنگ تغییر متوسط $f(x)=x+\frac{۴}{x}$ در بازه $[۱,\alpha]$، با آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=۳$ برابر است. مقدار $\alpha$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته) اگر $f$ در بازه $[\alpha,\beta]$ تعریف شده باشد:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

و $f$ در $x_{۰}$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه: $\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای}=f'(x_{۰})$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(\alpha)-f(۱)}{\alpha-۱}=\frac{\alpha+\frac{۴}{\alpha}-۵}{\alpha-۱}=\frac{\alpha^{۲}-۵\alpha+۴}{\alpha(\alpha-۱)}\Rightarrow\frac{\alpha-۴}{\alpha}=۱-\frac{۴}{\alpha}$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای}=۱-\frac{۴}{x^{۲}}\Rightarrow f'(۳)=۱-\frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha^{۲}-۵\alpha+۴}{\alpha(\alpha-۱)}=\frac{۵}{۹}\Rightarrow\alpha=۹$$

www.mapedu.ir

33- اگر $f(x)=\begin{cases}[x](x+a) & x\geq ۲\\ \frac{b}{x}+۲ & x<۲\end{cases}$، به طوری که $f'_+(۲)-f'_-(۲)=۶$، مقدار a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۷۷ تا ۸۰ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

شرط لازم برای مشتق‌پذیری f در $x=۲$ آن است که f در $x=۲$ پیوسته باشد، علاوه بر آن شرط لازم برای مشتق‌پذیری راست، پیوستگی راست و شرط لازم برای مشتق‌پذیری چپ، پیوستگی چپ f در $x=۲$ است.

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\frac{b}{۲}+۲ \qquad \lim_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)=۲(a+۲)$$

پس شرط $\frac{b}{۲}+۲=۲a+۴$ در ابتدا لازم است. از طرفی، وقتی $x>۲$، آن‌گاه $[x]=۲$

$$f'(x)=\begin{cases}۲ & x>۲\\ -\frac{b}{x^۲} & x<۲\end{cases}$$

$$f'_+(۲)=۲ \qquad f'_-(۲)=-\frac{b}{۴}$$

$$۲-(-\frac{b}{۴})=۶\Rightarrow\frac{b}{۴}=۴\Rightarrow b=۱۶\Rightarrow ۲a+۴=۱۰\Rightarrow a=۳$$

گروه آموزشی ماز

34- هرگاه $f(x)=|a-bx|[۳x]$، به طوری که $f'_-(۳)=-۱۶$، مقدار $f'_+(۳)$ چه عددی است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۲- ۳) ۱۸- ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۷۷ تا ۸۰ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

چون هم صحبت از مشتق چپ و هم صحبت از مشتق راست شده است، پس باید تابع هم پیوستگی چپ داشته باشد هم پیوستگی راست، یعنی تابع در $x=۳$ پیوسته است.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to ۳^+} f(x)=|a-۳b|\times ۹=f(۳)\\ \lim_{x\to ۳^-} f(x)=|a-۳b|\times ۸\end{array}\right\}\Rightarrow a=۳b$$

زیرا باید حد چپ و راست در $x=۳$ با هم برابر باشند. با این فرض داریم:

$$f(x)=|۳b-bx|[۳x]$$

$$x<۳\Rightarrow f(x)=|b|(۳-x)[۳x]=|b|(۳-x)\times ۸$$

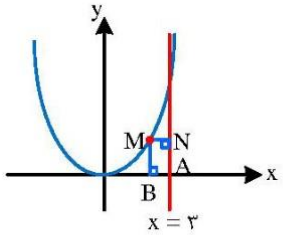
$$f'_-(x)=-۸|b|\Rightarrow -۸|b|=-۱۶\Rightarrow |b|=۲$$

$$x>۳\to f(x)=|b|(x-۳)[۳x]\to f(x)=۹|b|(x-۳)\to f'_+(x)=۱۸$$

گروه آموزشی ماز

35- در شکل روبه‌رو، نقطه M روی نمودار $y=x^۴$ حرکت می‌کند. اگر مساحت مستطیل MNAB را تابع f(x) بنامیم، مقدار $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۲h)-f(۲)}{h}$ چه عددی است؟

۱) ۸۴-
۲) ۳۲-
۳) ۸۴
۴) ۳۲



پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۸۳ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

دقت کنید خط $x = ۳$ خط ثابتی است و نقطه M نقطه متحرکی است. پس مساحت مستطیل برابر است با:

$$\begin{cases} B\Big|_{۰}^{x} \\ S = MB.MN = f(x).(۳-x) = x^{۴}(۳-x) = ۳x^{۴} - x^{۵} \end{cases}$$

**نکته:**

اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = f'(\alpha)$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(\alpha+mh)-f(\alpha)}{h} = mf'(\alpha)$$

با این مقدمات:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۲+۲h)-f(۲)}{h} = ۲f'(۲) \\ f'(x) = ۱۲x^{۳} - ۵x^{۴} \end{array}\right\} \text{حاصل حد} = ۲(۹۶-۸۰) = ۳۲$$

گروه آموزشی ماز

**36 –** اگر f تابعی پیوسته باشد به طوری که $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{f(x)+۲}{x^{۳}+۱} = -\dfrac{۲}{۳}$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f^{۲}(-۱)-f^{۲}(-۱-۳h)}{۲h}$ چه عددی است؟

۱) $-۴$ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) $-۱۲$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۷۷ تا ۸۳ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

با توجه به آن‌که $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{f(x)+۲}{x^{۳}+۱} = -\dfrac{۲}{۳}$ داریم: $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{f(x)+۲}{(x+۱)(x^{۲}-x+۱)} = \dfrac{۰}{۰}$، پس:

$$f(-۱)+۲ = ۰ \Rightarrow f(-۱) = -۲$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{(x+۱)\underbrace{(x^{۲}-x+۱)}_{۳}} = \lim_{x\to -۱}\frac{۱}{۳}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}f'(-۱) = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow f'(-۱) = -۲$$

از طرفی داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^{۲}(-۱)-f^{۲}(-۱-۳h)}{۲h} = \lim_{h\to ۰}\frac{(f(-۱)-f(-۱-۳h))(f(-۱)+f(-۱-۳h))}{۲h}$$

دقت کنید $f(-۱)+f(-۱-۳h)$ وقتی $h\to ۰$ برابر $۲f(-۱)$ است.

$$= \lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱-۳h)-f(-۱)}{۲h}\times\frac{-۲f(-۱)}{۱} = +۳f'(-۱)\times f(-۱) = ۳\times(-۲)(-۲) = ۱۲$$

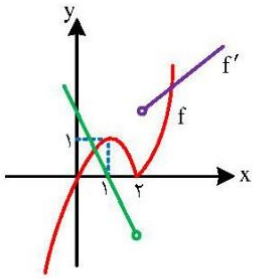
گروه آموزشی ماز

**37 –** تابع $f(x)=x|x-۲|$، نمودار مشتق خودش را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۹۰ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**




$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۲x & x\geq ۲ \\ ۲x-x^{۲} & x\leq ۲ \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x-۲ & x>۲ \\ ۲-۲x & x<۲ \end{cases}$$

$f'$ در $x=۲$ هم تعریف نشده است و هم ناپیوسته و نمودار آن نمودار f را در ۲ نقطه قطع می‌کند.

گروه آموزشی ماز

**38 ـ** اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد و $f(۳x+\sqrt{x^{۲}+۳})=\frac{۱}{x^{۲}}$، مقدار $f'(۵)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۷}{۴}$ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) $-\frac{۲}{۷}$ ۴) $-\frac{۴}{۷}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۸۷ و ۸۸ ـ متوسط)

**نکته:**

اگر f و g توابع مشتق‌پذیری باشند، آن‌گاه تابع fog هم مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(fog)'(x)=g'(x).f'(g(x))$$

**پاسخ تشریحی:**

اگر از طرفین فرض داده شده مشتق بگیریم، آن‌گاه:

$$(۳+\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+۳}})f'(۳x+\sqrt{x^{۲}+۳})=\frac{-۲}{x^{۲}}$$

حال باید x را چنان پیدا کنیم که : $۳x+\sqrt{x^{۲}+۳}=۵$

$$\sqrt{x^{۲}+۳}=۵-۳x \qquad x\leq\frac{۵}{۳}$$

$$x^{۲}+۳=۲۵+۹x^{۲}-۳۰x\Rightarrow ۸x^{۲}-۳۰x+۲۲=۰\begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{۱۱}{۴} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

حال قرار می‌دهیم $x=۱$ و داریم:

$$(۳+\frac{۱}{۲})f'(۵)=-۲\Rightarrow f'(۵)=\frac{-۲}{\frac{۷}{۲}}=-\frac{۴}{۷}$$

گروه آموزشی ماز

**39 ـ** هرگاه $f(۱)=۱$ و $fof(x)=x^{۳}+\frac{۲}{x}$، مقدار $f'(۱)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۸۷ و ۸۸ ـ متوسط)

**نکته:**

$$(fog)'(x)=g'(x).f'(g(x))$$

$$(fof)'(x)=f'(x).f'(f(x))$$

**پاسخ تشریحی:**

از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$(fof)'(x) = ۳x^۲ - \frac{۲}{x^۲}$$

$$f'(x).f'(f(x)) = ۳x^۲ - \frac{۲}{x^۲}$$

$$x = ۱ : f'(۱).f'(۱) = ۱ \Rightarrow f'(۱) = \begin{cases} ۱ \\ -۱ \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

**40 -** برای تابع پیوسته f شرط $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{f(x)+۱}{x^۳-۱} = \frac{-۲}{۳}$ برقرار است. هرگاه $(gof)'(۱) = ۳$، مقدار $g'(-۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۹}$ ۳) $-۲$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۸۷ و ۸۸ ـ متوسط)

**نکته:**

f در $\alpha$ پیوسته باشد: $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(\alpha)$

**پاسخ تشریحی:**

با توجه به آن‌که $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{f(x)+۱}{(x-۱)(x^۲+x+۱)} = -\frac{۲}{۳}$ و $f(۱) = -۱$ و به کمک آن:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{f(x)+۱}{(x-۱)(x^۲+x+۱)} = \frac{f'(۱)}{۳} = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow f'(۱) = -۲$$

پس $f(۱) = -۱$ و $f'(۱) = -۲$، از طرفی:

$$(gof)'(۱) = ۳ \Rightarrow f'(۱).g'(\underbrace{f(۱)}_{-۱}) = ۳$$

$$\underbrace{f'(۱)}_{-۲}\ g'(-۱) = ۳ \Rightarrow g'(-۱) = -\frac{۳}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

**41 -** هرگاه $f(۱) = ۲f'(۱) = ۱$، مشتق $y = f(\frac{x}{f(x)})$ به ازای $x = ۱$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۸۷ و ۸۸ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

$$y = f(\frac{x}{f(x)}) \Rightarrow y' = (\frac{x}{f(x)})'.f'(\frac{x}{f(x)})$$

$$y'(x) = \frac{f(x) - xf'(x)}{f^۲(x)}.f'(\frac{x}{f(x)})$$

$$y'(۱) = \frac{f(۱) - f'(۱)}{f^۲(۱)} \times f'(\frac{۱}{f(۱)}) \Rightarrow y'(۱) = \frac{۱-\frac{۱}{۲}}{۱} \times f'(۱) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

گروه آموزشی ماز

42- اگر $f(x)=\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+2}}$، مشتق $f(\frac{2}{x})$ به ازای $x=2$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{2}{9}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۸۷ و ۸۸ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

ابتدا مشتق تابع را بدست می‌آوریم:

$$y=f(\frac{2}{x}) \Rightarrow y'=(\frac{2}{x})'.f'(\frac{2}{x})$$

$$y'=\frac{-2}{x^2}f'(\frac{2}{x}) \Rightarrow y'(2)=\frac{-1}{2}f'(1)$$

حال با یافتن $f'(1)$ مقدار $y'(2)$ بدست می‌آید.

$$f(x)=(\frac{2x+1}{x+2})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=(\frac{1}{3})(\frac{2x+1}{x+2})^{\frac{1}{3}-1}\times(\frac{2x+1}{x+2})'$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(\frac{2x+1}{x+2})^{-\frac{2}{3}}\times\frac{4-1}{(x+2)^2}\rightarrow f'(1)=\frac{1}{9}$$

$$y'(2)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}=-\frac{1}{18}$$

گروه آموزشی ماز

43- اگر $f(x)=\frac{x}{x+1}$ و $(fog)'(2)=3$، مقدار $\lim_{h\to 0}\frac{g(2+3h)-3}{h}$ چه عددی است؟

۱) ۱۶ ۲) ۴۸ ۳) ۱۴۴ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۸۷ و ۸۸ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+3h)-3}{h}=\frac{0}{0}\rightarrow g(2)=3$$

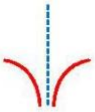
$$g'(2).f'(g(2))=3 \Rightarrow g'(2)f'(3)=3 *$$

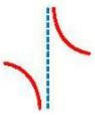
$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(3)=\frac{1}{16}\xrightarrow{*}g'(2)=48$$

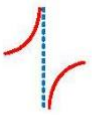
$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{g(2+3h)-3}{h}=3g'(2)=144$$

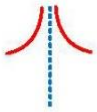
گروه آموزشی ماز

44- اگر $f(x)=2+\sqrt{|x|}$، نمودار تابع $f'$ در حوالی $x=0$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۸۸ تا ۹۱ ـ ساده)

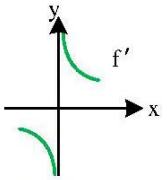
**پاسخ تشریحی:**

ابتدا برای $x>0$ و $x<0$، مشتق تابع را یافته و نمودار $f'$ را در مجاورت $x=0$ رسم می‌کنیم.

$$x>0 \Rightarrow f(x)=2+\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x)=+\infty$$

$$x<0 \Rightarrow f(x)=2+\sqrt{-x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{-x}} \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x)=-\infty$$

پس:




گروه آموزشی ماز

**45 -** اگر مماس بر $y=\frac{4}{x^2}$ در $x=1$ رسم کنید. امتداد خط مماس، نمودار تابع را در نقطه‌ای به طول $\alpha$ قطع می‌کند. $y(\alpha)$ چه عددی است؟

۱) ۴۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۸۷ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

ابتدا معادله خط مماس در $x=1$ را بدست می‌آوریم:

$$y=\frac{4}{x^2} \Rightarrow A\left|\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right. \in f$$

$$y'=-\frac{8}{x^3} \quad \text{شیب مماس}=f'(1)=-8$$

$$\text{خط مماس} \quad y-4=-8(x-1) \Rightarrow y=-8x+12$$

خط بدست آمده به عنوان خط مماس را با نمودار تابع قطع می‌دهیم:

$$\frac{4}{x^2}=12-8x \Rightarrow 4=12x^2-8x^3 \Rightarrow 8x^3-12x^2+4=0$$

$$8x^3-12x^2+4=(x-1)^2(8x+4)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

یعنی $\alpha=-\frac{1}{2}$، پس:

$$f(\alpha)=f(-\frac{1}{2})=16$$

گروه آموزشی ماز

**46 -** در کدام نقطه از منحنی $f(x)=x^2+4x+1$، خط مماس بر منحنی بر خط $2y=x+6$ عمود است؟

۱) $(-2,-3)$ ۲) $(-3,-2)$ ۳) $(3,22)$ ۴) $(2,13)$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۸۷ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

چون قرار است خط مماس بر خط $y=\frac{1}{2}x+3$ عمود باشد، پس باید شیب خط مماس $-2$ باشد، یعنی $f'(\alpha)=-2$. پس:

$$f'(x)=2x+4 \Rightarrow 2\alpha+4=-2 \Rightarrow \alpha=-3$$

لذا نقطه موردنظر $A(-3,-2)$ است.

گروه آموزشی ماز

**47 -** با فرض آن‌که $f(x)=\sqrt{\frac{2}{x+1}}$، مشتق تابع $y=f^{-1}(x)$ به ازای $x=\frac{1}{2}$ چه عددی است؟

۱) $-64$ ۲) $16$ ۳) $-32$ ۴) $4$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۸۷ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

ابتدا ضابطهٔ $f^{-1}$ را بدست می‌آوریم:

$$y=\sqrt{\frac{۲}{x+۱}}\Rightarrow y^{۲}=\frac{۲}{x+۱}\Rightarrow x+۱=\frac{۲}{y^{۲}}$$

$$f^{-۱}(x)=\frac{۲}{x^{۲}}-۱\Rightarrow y=\frac{۲}{x^{۲}}-۱$$

حال مشتق آن را بدست آورده و به جای x عدد $\frac{۱}{۲}$ را جایگزین می‌کنیم:

$$y'=\frac{-۴}{x^{۳}}\Rightarrow y'(\frac{۱}{۲})=-۳۲\Rightarrow (f^{-۱})'(\frac{۱}{۲})=-۳۲$$

گروه آموزشی ماز

**48 ـ** دو تابع $f(x)=x\sqrt{x}$ و $g(x)=x^{۲}+ax+b$ در نقطه‌ای به طول $x=۴$ بر هم مماسند، مقدار $g(۶)$ چه عددی است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۸۷ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

چون در نقطه‌ای به طول ۴ بر هم مماسند، پس:

$$\begin{cases} f(۴)=g(۴) \\ f'(۴)=g'(۴)\end{cases} \Rightarrow ۱۶+۴a+b=۸$$

$$f'(x)=۲x+a$$

$$g'(x)=\frac{۳}{۲}\sqrt{x}\Rightarrow ۸+a=۳\Rightarrow a=-۵, b=۱۲\rightarrow g(x)=x^{۲}-۵x+۱۲$$

$$\Rightarrow g(۶)=۳۶-۳۰+۱۲=۱۸$$

گروه آموزشی ماز

**49 ـ** با فرض $f(x)=x-\frac{a}{x}$ و $g(۲x)=f(x^{۲})$، اگر $g''(-۲)=-۳$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{۷}{۵}$ ۳) ۷ ۴) $\frac{۷}{۳}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۹۰ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

از طرفین تساوی $g(۲x)=f(x^{۲})$ مشتق گرفته و داریم:

$$۲g'(۲x)=۲xf'(x^{۲})\Rightarrow g'(۲x)=xf'(x^{۲})$$

مجدداً از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$۲g''(۲x)=f'(x^{۲})+۲x^{۲}f''(x^{۲})$$

قرار می‌دهیم: $x=-۱$

$$۲g''(-۲)=f'(۱)+۲f''(۱)$$

$$f(x)=x-\frac{a}{x}\Rightarrow f'(x)=۱+\frac{a}{x^{۲}}\Rightarrow f''(x)=\frac{-۲a}{x^{۳}}$$

$$\Rightarrow f'(۱)=۱+a\ ,\ f''(۱)=-۲a$$

پس با جایگذاری داریم:

$$-۶=۱+a-۴a\Rightarrow -۶=۱-۳a\Rightarrow ۳a=۷\Rightarrow a=\frac{۷}{۳}$$

50- با فرض $f(x)=\frac{x}{x+1}$، اگر در نقطه‌ای که مشتق اول و مشتق دوم با هم برابر هستند، بر f مماس رسم کنیم، عرض از مبدأ خط مماس کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{9}{4}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۹۰ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2} \quad f''(x)=\frac{-2}{(x+1)^3}$$

$$f'(\alpha)=f''(\alpha)\Rightarrow\frac{-2}{\alpha+1}=1\Rightarrow\alpha=-3$$

$$A\left|\begin{matrix}-3\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\right. \quad , \quad f'(-3)=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow y-\frac{3}{2}=\frac{1}{4}(x+3)$$

$$\text{عرض از مبدأ}=\frac{3}{4}+\frac{6}{4}=\frac{9}{4}$$

گروه آموزشی ماز

51- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^2+\frac{k}{x}$، در بازه $[1,4]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=3$ برابر است، مقدار k کدام است؟

۱) $-\frac{24}{5}$ ۲) $-\frac{36}{5}$ ۳) $\frac{18}{5}$ ۴) $-\frac{18}{5}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۹۵ ـ متوسط)

نکته:

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[\alpha,\beta]$ برابر $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ است و آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x_0$ برابر $f'(x_0)$ است.

پاسخ تشریحی:

برای حل تست باید k را چنان بیابیم که: $\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(3)$

با توجه به آن‌که $f'(x)=2x-\frac{k}{x^2}$ داریم:

$$\frac{(16+\frac{k}{4})-(1+k)}{3}=6-\frac{k}{9}\Rightarrow\frac{15-\frac{3k}{4}}{3}=6-\frac{k}{9}\Rightarrow 5-\frac{k}{4}=6-\frac{k}{9}$$

$$-1=\frac{k}{4}-\frac{k}{9}=\frac{5k}{36}\Rightarrow k=\frac{-36}{5}$$

گروه آموزشی ماز

52- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^2+mx+3$ در بازه $[3,5]$ دو برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در ابتدای بازه است. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=m$ چه عددی است؟

۱) $-12$ ۲) $-4$ ۳) $-8$ ۴) $-16$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۹۵ ـ متوسط)

**نکته۱:**

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[\alpha,\beta]$ برابر $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ است و آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x_0$ برابر $f'(x_0)$ است.

**نکته۲:**

آهنگ تغییر متوسط تابع درجه دو f در بازه $[a,b]$ برابر است با $f'(\frac{a+b}{2})$ .

**روش اول:**

در این تست طبق نکته یک داریم:

$$\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=2f'(3)\Rightarrow\frac{(25+5m+3)-(9+3m+3)}{2}=2(6+m)$$

$$\frac{16+2m}{2}=12+2m\Rightarrow 16+2m=24+4m\Rightarrow 2m=-8\Rightarrow m=-4$$

$$f(x)=x^2-4x+3\Rightarrow f'(x)=2x-4$$

$$f'(-4)=-8-4=-12$$

**روش دوم:**

در این تست طبق نکته دو داریم:

$$f'(4)=2f'(3),\ f'(x)=2x+m$$

$$8+m=2(6+m)\rightarrow m=-4$$

$$f'(-4)=-8+m=-8-4=-12$$

گروه آموزشی ماز

**53 ـ** تابع $f(x)=\frac{3-a[x]}{2x+a[\frac{1}{x}]}$ در $x=1$ حد دارد. با فرض $a\neq 0$ مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۳٦ ـ ساده)

**پاسخ تشریحی:**

باید حد چپ و حد راست در $x=1$ برابر باشند:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{3-a}{2+0}=\frac{3-a}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{3-0}{2+a}=\frac{3}{2+a}$$

$$\Rightarrow\frac{3-a}{2}=\frac{3}{2+a}\Rightarrow(3-a)(2+a)=6\Rightarrow a-a^2=0\xrightarrow{a\neq 0}a=1$$

54 - با فرض $f(x)=\frac{x^{۲}-۲x}{۱+\sqrt{۲x}}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{f(x)}{f(x+۲)}$ کدام است؟

۱) $-۳$ ۲) $۳$ ۳) $-۲$ ۴) $۲$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۹۲ ـ متوسط)

**نکته:**
اگر f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر و $f(a)=۰$ و $h(x)=f(x)g(x)$ باشد، آن‌گاه $h'(a)=f'(a)g(a)$.

**پاسخ تشریحی:**

برای محاسبهٔ حد از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)}{f(x+۲)}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{H}\lim_{x\to ۰^+}\frac{f'(x)}{f'(x+۲)}=\frac{f'_+(۰)}{f'(۲)}$$

حال $f'_+(۰)$ و $f'(۲)$ را محاسبه می‌کنیم. برای محاسبهٔ $f'_+(۰)$ فقط از x و برای محاسبهٔ $f'(۲)$ فقط از $x-۲$ مشتق می‌گیریم:

$$f'_+(۰)=\frac{۱(x-۲)}{۱+\sqrt{۲x}}\Big|_{x=۰}=-۲$$

$$f'(۲)=\frac{۱\times x}{۱+\sqrt{۲x}}\Big|_{x=۲}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \text{جواب حد}=\frac{-۲}{\frac{۲}{۳}}=-۳$$

گروه آموزشی ماز

55 - حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{a-\sqrt{\cos ۲x}}{\sin^{۲}x}$ در صورت وجود، چند برابر a است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $۲$ ۳) $-۱$ ۴) $۱$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۵۲ و ۵۳ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

شرط وجود حد آن است که حد $\frac{۰}{۰}$ شود، پس باید $a=۱$ باشد. حال صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\sqrt{\cos ۲x}}{\sin^{۲}x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{\sin^{۲}x\underbrace{(۱+\sqrt{\cos ۲x})}_{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^{۲}x}{\sin^{۲}x\times ۲}=۱$$

پس جواب ۱ برابر a است.

گروه آموزشی ماز

56 - تابع $f(x)=\begin{cases}|x| & |x|<1\\ x^3+ax+b & |x|\geq 1\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. حاصل $2a-b$ کدام است؟

۱) $-3$ ۲) $2$ ۳) $1$ ۴) $-1$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۴۲ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}|x| & -1<x<1\\ x^3+ax+b & x\geq 1 \cup x\leq -1\end{cases}$$

کافی است پیوستگی تابع را در نقاط $x=1$ و $x=-1$ بررسی کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Rightarrow 1=1+a+b\Rightarrow a=-b\\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)\Rightarrow 1=-1-a+b\Rightarrow b-a=2\end{cases}$$

پس: $b=1$ و $a=-1$ و در نتیجه $2a-b=-3$ است.

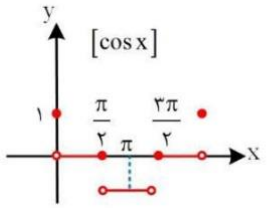
گروه آموزشی ماز

57 - تابع $f(x)=x[\cos x]$ در نقطه‌ای با کدام طول، فقط از راست پیوسته است؟

۱) $x=0$ ۲) $x=\frac{\pi}{2}$ ۳) $x=\pi$ ۴) $x=\frac{3\pi}{2}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۴۲ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**




تابع f در $x=0$ پیوسته است. (عامل صفرکننده در براکت ضرب شده است.)

تابع f در $x=\frac{\pi}{2}$ فقط از چپ پیوسته است.

تابع f در $x=\pi$ پیوسته است.

تابع f در $x=\frac{3\pi}{2}$ فقط از راست پیوسته است.

گروه آموزشی ماز

58 - اگر $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-3}{2x^2+ax+b}=-\infty$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) $-6$ ۲) $2$ ۳) $-4$ ۴) $6$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۵۷ ـ ساده)

**پاسخ تشریحی:**

باید مخرج در $x=1$، ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$2x^2+ax+b=2(x-1)^2=2x^2-4x+2\Rightarrow a=-4, b=2\Rightarrow a-b=-6$$

گروه آموزشی ماز

59 - اگر $f(x)=x-\sqrt{ax^2+x+2}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{3x-1}=1$ باشد. حاصل $\lim\limits_{x\to-2^+}[x^2]f(x)$ کدام است؟

۱) $-16$ ۲) $-24$ ۳) $-18$ ۴) $-12$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ٦٤ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

از قانون پرتوان استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\dots}{a'x^n+b'x^{n-1}+\dots}=\frac{a}{a'}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{ax^2+x+2}}{3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{a}|x|}{3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{a}x}{3x}=\frac{1+\sqrt{a}}{3}=1\Rightarrow a=4\to f(x)=x-\sqrt{4x^2+x+2}$$

حال حد خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-2^+}[x^2]f(x)=[4^-]f(-2)=3(-2-\sqrt{16})=-18$$

گروه آموزشی ماز

60 - اگر f تابعی مشتق‌پذیر و $g(x)=f(x+\sqrt{x^2+2})$ و $f'(2)=3$ باشد، مقدار $g'(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ٨٦ تا ٨٨ ـ متوسط)

**نکته:**

$$\left(f(u)\right)'=u'f'(u)$$

**پاسخ تشریحی:**

$$g'(x)=(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}})f'(x+\sqrt{x^2+2})\Rightarrow g'(\frac{1}{2})=(1+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}})f'(\frac{1}{2}+\frac{3}{2})$$

$$\Rightarrow g'(\frac{1}{2})=\frac{4}{3}f'(2)=\frac{4}{3}\times 3=4$$

گروه آموزشی ماز

61 - اگر $f(x)=x\sqrt{2x-1}$ باشد، حاصل مشتق تابع $y=x^2f(\frac{2}{x})$ در نقطهٔ $x=2$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ٨٦ تا ٨٨ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

ابتدا مشتق تابع f در نقطهٔ $x=1$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\sqrt{2x-1}+\frac{2x}{2\sqrt{2x-1}}\Rightarrow f'(1)=2$$

$$y=x^2f(\frac{2}{x})\Rightarrow y'=2xf(\frac{2}{x})+x^2(-\frac{2}{x^2})f'(\frac{2}{x})$$

$$\Rightarrow y'(2)=4f(1)-2f'(1)=4-2\times 2=0$$

گروه آموزشی ماز

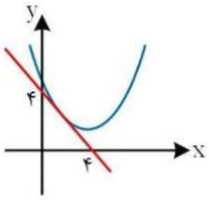
62 ـ خطی که در نقطهٔ A بر نمودار $f(x)=x^{۲}-۵x+b$ مماس می‌شود، محورهای مختصات را در نقاطی به طول و عرض ۴ قطع می‌کند. مقدار b کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۸٦ و ۸۷ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

یک شکل فرضی رسم می‌کنیم. شیب خط مماس برابر ۱− است.




باید نقطهٔ $A(۲,۲)$ در معادلهٔ $f(x)$ صدق کند:

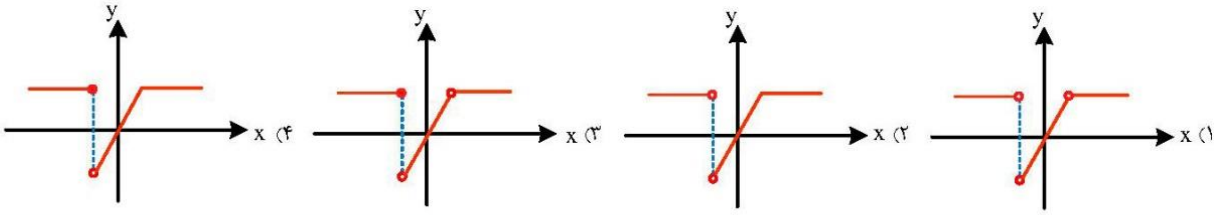
$f'(x)=۲x-۵=-۱\Rightarrow x=۲$

معادله خط مماس : $y=-x+۴\Rightarrow y(۲)=f(۲)=۲$

$f(۲)=۲\Rightarrow ۴-۱۰+b=۲\Rightarrow b=۸$

گروه آموزشی ماز

63 ـ نمودار مشتق تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۳ & |x|<۱ \\ ۲x & |x|\geq ۱ \end{cases}$ به کدام صورت است؟

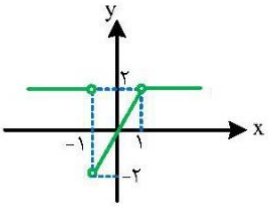



پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۸۹ تا ۹۱ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

تابع f در $x=۱$ ناپیوسته و در نتیجه، مشتق‌ناپذیر است. همچنین تابع f در $x=-۱$ پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر است. بنابراین نقاط $x=۱\,,\,x=-۱$ باید در نمودار $f'$ توخالی باشند.

$f'(x)=\begin{cases} ۲x & |x|<۱ \\ ۲ & |x|>۱ \end{cases}$




گروه آموزشی ماز

64 ـ با فرض $f(x)=(x^{۲}-۱)(x^{۳}-۱)$، حاصل $f''(۱)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۸۷ و ۹۰ ـ متوسط)

**نکته:**

$(f(x)g(x))''=(f'(x)g(x)+f(x)g'(x))'=(f'(x)g(x))'=f''(x)g(x)+f'(x)g'(x)$ $\qquad (f(x)=۰)$

**پاسخ تشریحی:**

ابتدا دقت کنید که:

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x-1)(x^2+x+1)=\underbrace{(x-1)^2}_{g(x)}\underbrace{(x+1)(x^2+x+1)}_{h(x)}$$

با توجه به این که $g'(1)=0\ ,\ g(1)=0$:

$$(gh(1))''=g''(1)h(1)+g'(1)h'(1)\xrightarrow{g'(1)=0}g''(1)h(1)=2\times(x+1)(x^2+x+1)\xrightarrow{x=1}f''(1)=g''(1)h(1)=12$$

گروه آموزشی ماز

**65 - آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^2+ax-3$ در بازهٔ $[1,3]$، نصف آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در نقطهٔ $x=2$ است. a کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۴− ۳) ۲− ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۹۵ ـ متوسط)

**نکته:**

آهنگ تغییر متوسط f در بازهٔ $[a,b]$ برابر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ و آهنگ تغییر لحظه‌ای f در نقطهٔ $x=c$ برابر $f'(c)$ است.

**نکته:**

آهنگ تغییر متوسط تابع درجه دوم f در بازهٔ $[a,b]$ برابر با آهنگ لحظه‌ای آن در نقطهٔ $\frac{a+b}{2}$ است.

**پاسخ تشریحی:**

با توجه به نکتهٔ فوق:

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(2)=\frac{1}{2}f'(2)\rightarrow f'(2)=0$$

$$f'(x)=2x+a\Big|_2=4+a=0\rightarrow a=-4$$

گروه آموزشی ماز

66- f تابعی پیوسته است به طوری که $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-۲}{x^۲-۴}=\frac{۳}{۸}$ ، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+۲h)-f(۲)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۳) ۴)

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۷۲ تا ۷۴ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

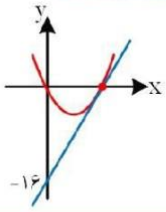
$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۲}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{۳}{۸}\Rightarrow \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۲}{(x-۲)\times ۴}=\frac{۳}{۸}\Rightarrow \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۲}{x-۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \begin{cases} f(۲)=۲ \\ f'(۲)=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

از طرفی:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۲h)-f(۲)}{h}=۲f'(۲)=۲\times\frac{۳}{۲}=۳$$

گروه آموزشی ماز

67- در شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=x(x-a)$ و خط مماس بر آن رسم شده است. مقدار a کدام است؟




۱) $۲\sqrt{۲}$

۲) $۳\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۳}$

۴)

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۷۳ و ۷۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

با توجه به نمودار، در واقع در $x=a$ مماس رسم شده است و عرض از مبدأ خط مماس ۱۶- شده است.

اگر فرض کنیم نقطه تماس A باشد، آن‌گاه $A\Big|_{۰}^{a}$ و داریم:

$$\text{شیب خط مماس}=f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}\Rightarrow f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x(x-a)}{x-a}=a\ ,(a>۰)$$

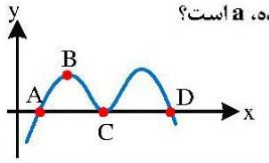
$$y-۰=a(x-a)\Rightarrow y=ax-a^۲ \text{ خط مماس}$$

از طرفی می‌دانیم که خط مماس از نقطه $(۰,-۱۶)$ عبور می‌کند، پس :

$$-a^۲=-۱۶\Rightarrow\begin{cases} a=۴\ ✓ \\ a=-۴ \quad \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

68- نمودار تابع f در شکل مقابل داده شده است. اگر $(f'-f)(a)$ عددی مثبت باشد، طول کدام‌یک از نقاط داده شده، a است؟




۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۷۵ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

$$\begin{cases} f(x_A)=0 \\ f'(x_A)>0 \end{cases} \Rightarrow (f'-f)(x_A)>0 \ \checkmark$$

$$\begin{cases} f(x_B)>0 \\ f'(x_B)=0 \end{cases} \Rightarrow (f'-f)(x_B)<0 \ \times$$

$$\begin{cases} f(x_C)=0 \\ f'(x_C)=0 \end{cases} \Rightarrow (f'-f)(x_C)=0 \ \times$$

$$\begin{cases} f(x_D)=0 \\ f'(x_D)<0 \end{cases} \Rightarrow (f'-f)(x_D)<0 \ \times$$

گروه آموزشی ماز

69- اگر $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x+\cos x}-\sqrt{\cos x-\sin x}}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} f(\frac{-1}{x})$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$
۲) $\sqrt{2}$
۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۵۳ و ۶۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم $\frac{\text{عدد منفی}}{-\infty}=0^+$ است، بنابراین به جای محاسبه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(\frac{-1}{x})$، می‌توانیم $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x+\cos x}-\sqrt{\cos x-\sin x}}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x+\cos x}-\sqrt{\cos x-\sin x}}\times\frac{\sqrt{\sin x+\cos x}+\sqrt{\cos x-\sin x}}{\sqrt{\sin x+\cos x}+\sqrt{\cos x-\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}\times(\sqrt{\sin x+\cos x}+\sqrt{\cos x-\sin x})}{2\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}\times(2)}{2\sqrt{1-\cos x}\sqrt{1+\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

توجه: $\sin^2 x=1-\cos^2 x=(1-\cos x)(1+\cos x)$

گروه آموزشی ماز

70- اگر $f(x)=\frac{x^{۲}-۴}{x+۲[x]}$، حاصل $f'_{+}(۲)-f'_{-}(-۲)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۶}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۷۹ و ۸۰ ـ متوسط)

**نکته۱:**

شرط لازم (و نه کافی) برای مشتق‌پذیری f در نقطه‌ای به طول $\alpha$ پیوستگی f در $\alpha$ است.

**نکته۲:**

$$f(x)=(x-\alpha)g(x)\Rightarrow f'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha} g(x)$$

**پاسخ تشریحی:**

ابتدا f را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=(x-۲)(x+۲)\frac{۱}{x+۲[x]}$$

$$f'_{+}(۲)=\lim_{x\to ۲^{+}}(x+۲)\frac{۱}{x+۲[x]}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

$$f'_{-}(-۲)=\lim_{x\to -۲^{-}}(x-۲)\frac{۱}{x+۲[x]}=\frac{-۴}{-۸}=\frac{۱}{۲}$$

$$\text{حاصل}=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۶}$$

گروه آموزشی ماز

71- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+\frac{۱}{\sqrt{x}} & x\geq ۱ \\ \sqrt{x}+\frac{b}{x^{۲}} & x<۱ \end{cases}$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $f'(\frac{a}{b})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴)

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۷۸ و ۹۱ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

**اولاً:** لازم است f در $x=۱$ پیوسته باشد، پس:

$$\lim_{x\to ۱^{-}} f(x)=\lim_{x\to ۱^{+}} f(x)=f(۱)\Rightarrow a+۱=b+۱\Rightarrow a=b$$

**ثانیاً:** شرط $f'_{-}(۱)=f'_{+}(۱)$ باید برقرار باشد، پس:

$$f'(x)=\begin{cases} ۲ax-\frac{۱}{۲x\sqrt{x}} & x>۱ \\ \frac{۱}{۲\sqrt{x}}-\frac{۲b}{x^{۳}} & x<۱ \end{cases}$$

$$f'_{-}(۱)=f'_{+}(۱)\Rightarrow ۲a-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}-۲b\xrightarrow{a=b}۴a=۱\Rightarrow a=b=\frac{۱}{۴}\Rightarrow f'(۱)=۰$$

$$f'(\frac{a}{b})=f'(۱)=۰$$

گروه آموزشی ماز

72- اگر تابع $f(x)=a-\sqrt[3]{ax+2}$ در $x=-2$ دارای مماس قائم باشد، شیب خط مماس بر تابع در $x=-3$ چه عددی است؟

۱)

۲) $-\frac{1}{3}$

۳) $-\frac{1}{12}$

۴) $\frac{1}{12}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۰ و ۸۶ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

ابتدا $f'$ را بدست می‌آوریم:

$$f'(x)=-\frac{a}{3\sqrt[3]{(ax+2)^2}}$$

قرار است تابع در $x=-2$ دارای مماس قائم باشد، یعنی تابع در این نقطه مشتق نامتناهی دارد یعنی $\lim\limits_{x\to -2} f'(x)=\infty$ ، پس: $x=-2$ ریشهٔ مخرج است.

$$-2a+2=0 \Rightarrow a=1$$

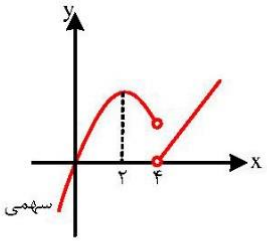
$$f(x)=1-\sqrt[3]{x+2}\ ,\ f'(x)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

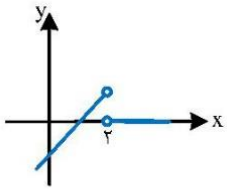
حال شیب خط مماس در $x=-3$ را به دست می‌آوریم:

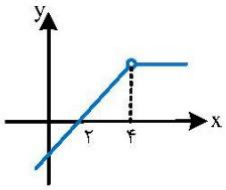
$$f'(-3)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{1}}=-\frac{1}{3}$$

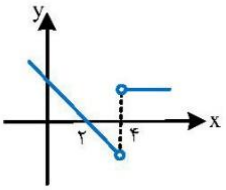
گروه آموزشی ماز

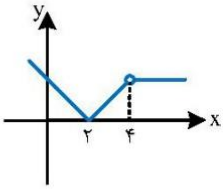
73- اگر نمودار $y=f(x)$ شکل روبه‌رو باشد، نمودار $y=f'(x)$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟




۱)



۲)



۳)



۴)


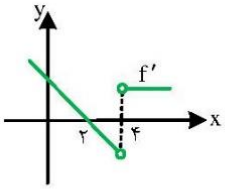

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۹ تا ۹۱ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

با توجه به نمودار داده شده تابع در $x=2$ دارای مماس افقی است، پس $f'(2)=0$ و از طرفی در $x=4$ مشتق ندارد.

برای $x>4$ تابع خطی و با شیب مثبت است، لذا $f'$ تابع ثابت با مقدار مثبت است و برای $x<4$، $f'$ تابع خطی به طوری که در بازه $(2,4)$ منفی است.

با این گزارهٔ بدست آمده داریم:




گروه آموزشی ماز

74- نیم‌مماس‌های رسم شده بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{4-ax^2}}$ در نقطه گوشه بر هم عمودند، مقدار $a$ کدام است؟

۱) ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۴) $4\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۷۹ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

نقطه گوشه نقطه‌ای روی نمودار تابع پیوسته f است به طوری که تابع در آن نقطه لااقل یک مشتق یک طرفه حقیقی داشته باشد، اما مشتق‌ناپذیر باشد.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-\sqrt{4-ax^2}}-0}{x}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{4-ax^2}}}{\sqrt{2+\sqrt{4-ax^2}}}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax^2}}{x\times 2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a}\,|x|}{2x}$$

$f'_+(0)=\frac{\sqrt{a}}{2}$ و $f'_-(0)=-\frac{\sqrt{a}}{2}$، چون نیم‌مماس‌ها در نقطه گوشه بر هم عمودند، پس:

$$(\frac{\sqrt{a}}{2})(-\frac{\sqrt{a}}{2})=-1\Rightarrow a=4$$

گروه آموزشی ماز

75- تابع $f(x)=\left[\frac{4}{\sqrt{x}+1}\right]$ در بازه $(0,\alpha)$ مشتق‌پذیر است. حداکثر مقدار $\alpha$ چه عددی است؟

۱) ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۴) $\frac{1}{9}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۹ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

تابع $y=[f(x)]$ قطعه قطعه ثابت است، لذا در بازه‌هایی که پیوسته است آن‌گاه مشتق‌پذیر هم هست، لذا کافی است بدانیم تابع در بازه $(0,\alpha)$ پیوسته باشد، حداکثر $\alpha$ کدام است.

$$g(x)=\frac{4}{\sqrt{x}+1}\Rightarrow g(0)=4$$

و تابع g نزولی اکید است.

پس تابع g را با خط $y=3$ قطع می‌دهیم و $\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{4}{\sqrt{x}+1}=3\Rightarrow 3\sqrt{x}=1\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{3}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{9}$$

پس تابع در بازه $(0,\frac{1}{9})$ پیوسته و مشتق‌پذیر خواهد بود.

گروه آموزشی ماز

76- اگر خطوط مماس بر نمودار تابع $f(x)=ax^4-2x^2+1$ در نقاطی به طول $x=1$ و $x=-1$ بر هم عمود باشند، جمع مقادیر a کدام است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۲ و ۸۳ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

خطوط مماس در نقاطی با طول $x=\pm 1$ بر هم عمودند، پس:

$$f'(1).f'(-1)=-1$$

$$f'(x)=4ax^3-4x \Rightarrow \begin{cases} f'(1)=4a-4=4(a-1) \\ f'(-1)=-4a+4=-4(a-1) \end{cases}$$

$$f'(1).f'(-1)=-16(a-1)(a-1)=-1$$

$$(a-1)^2=\frac{1}{16} \Rightarrow \begin{cases} a-1=\frac{1}{4} \to a_1=\frac{5}{4} \\ a-1=-\frac{1}{4} \to a_2=\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$a_1+a_2=\frac{8}{4}=2$$

گروه آموزشی ماز

77- اگر f تابعی پیوسته باشد به طوری که $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f^3(2x+1)+1}{2x^2+x-1}=4$ باشد، مشتق $f(x^2-2\sqrt{x})$ به ازای $x=1$ چه عددی است؟

۱) ۲) $-2$ ۳) ۴) $-\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۷ و ۸۸ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

اگر f تابعی پیوسته باشد مطابق قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{3f^2(2x+1)f'(2x+1)\times 2}{4x+1}=\frac{3f^2(-1)f'(-1)\times 2}{-3}=-2f^2(-1)f'(-1)=-2(-1)^2f'(-1)=-2f'(-1)$$

با توجه به آن‌که مخرج کسر صفر است پس صورت کسر هم صفر خواهد شد، یعنی: $f(-1)=-1$

$$-2f'(-1)=4 \Rightarrow f'(-1)=-2$$

از طرفی:

$$y=f(x^2-2\sqrt{x}) \Rightarrow y'=(2x-\frac{1}{\sqrt{x}})f'(x^2-2\sqrt{x})$$

$$y'(1)=(2-1)f'(-1)=f'(-1)=-2$$

گروه آموزشی ماز

78- اگر $f'(x)=\frac{x^{۲}}{x+۲}$ به طوری که $g(x)=f(x+\sqrt{x^{۲}+۳})$، مقدار $g'(۱)$ چه عددی است؟

۱) ۲/۴ ۲) ۲/۷ ۳) ۱/۸ ۴) ۰/۹

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۷ و ۸۸ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

از طرفین مشتق می‌گیریم و داریم:

$$g'(x)=(۱+\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+۳}})f'(x+\sqrt{x^{۲}+۳})$$

$$g'(۱)=(۱+\frac{۱}{۲})f'(۳)=\frac{۳}{۲}f'(۳)$$

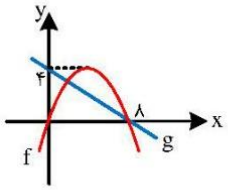
حال با توجه به $f'$ داریم: $f'(۳)=\frac{۹}{۵}$

پس:

$$g'(۱)=\frac{۳}{۲}\times\frac{۹}{۵}=\frac{۲۷}{۱۰}=۲/۷$$

گروه آموزشی ماز

79- نمودار سهمی f و تابع خطی g در شکل مقابل آورده شده است. مشتق $f^{۲}og$ به ازای $x=۲$ چه عددی است؟




۱) $-\frac{۱۵}{۴}$ ۲) $-\frac{۱۵}{۸}$

۳) ۴)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۷ و ۸۸ ـ دشوار)

**پاسخ تشریحی:**

ابتدا ضابطه تابع خطی g و تابع سهمی f را به دست می‌آوریم.

$$g(x)=-\frac{۱}{۲}x+۴ \qquad f(x)=-\frac{۱}{۴}x(x-۸)$$

مشتق f و g را به دست می‌آوریم.

$$g'(x)=-\frac{۱}{۲}\ ,\ \ f'(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲$$

حال داریم:

$$y=f^{۲}og(x)\Rightarrow y'(x)=g'(x).۲f\left(g(x)\right).f'\left(g(x)\right)$$

$$y'(۲)=g'(۲)۲f\left(\underbrace{\cancel{g(۲)}}_{۳}\right).f'\left(\underbrace{\cancel{g(۲)}}_{۳}\right)$$

$$y'(۲)=-\frac{۱}{۲}\times ۲f(۳).f'(۳)=-\frac{۱۵}{۴}\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۱۵}{۸}$$

گروه آموزشی ماز

80- هرگاه $2f(1)=f'(1)=2$، مشتق $y=fof(\frac{1}{x})+f^2(x^2)$ به ازای $x=1$ چه عددی است؟

۱) ۲) ۳) ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۷ و ۸۸ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

از طرفین فرض، مشتق می‌گیریم و داریم:

$$y' = f'(\frac{1}{x}).f'\left(f(\frac{1}{x})\right).\frac{-1}{x^2}+2f(x^2)f'(x^2).2x$$

$$y'(1) = f'(1)f'(1)(-1)+2f(1)f'(1)\times 2 = -2\times 2+2\times 1\times 2\times 2 = 4$$

گروه آموزشی ماز

81- اگر $f(1)=g(1)=1$ و $f'(1)=3g'(1)=-6$، مشتق $(f+g)of$ به ازای $x=1$ چه عددی است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۶ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۷ و ۸۸ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

$$y = (f+g)of \Rightarrow y'(x) = f'(x).(f+g)'\left(f(x)\right)$$

$$y'(1) = f'(1).\left(f'(f(1))+g'(f(1))\right)$$

$$y'(1) = -6\left(f'(1)+g'(1)\right) = -6(-6-2) = 48$$

گروه آموزشی ماز

82- هرگاه $f(x)=2x^2+ax+b$ به طوری که تساوی $f'of(x)=8x^2-12x-3$ برقرار باشد، مقدار $fof'(2)$ چه عددی است؟

۱) ۳۵ ۲) ۲۵ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۷ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$f(x) = 2x^2+ax+b \Rightarrow f'(x) = 4x+a$$

$$f'of(x) = 4(2x^2+ax+b)+a = 8x^2+4ax+a+4b$$

$$\begin{cases} 4a=-12 \rightarrow a=-3 \\ a+4b=-3 \rightarrow b=0 \end{cases} \rightarrow f(x) = 2x^2-3x$$

$$f'(x) = 4x-3 \Rightarrow fof'(2) = f(5) = 50-15 = 35$$

گروه آموزشی ماز

83- اگر $f$ و $g$ توابعی مشتق‌پذیر باشند به طوری که $g(2x+\frac{1}{\sqrt{x}})=f(x+\sqrt{3x+1})$، هرگاه $g'(3)=kf'(3)$، مقدار $k$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{21}{2}$ ۴) $\frac{7}{6}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۷ و ۸۸ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

از طرفین عبارت داده شده مشتق می‌گیریم و مطابق مشتق تابع مرکب داریم:

$$(2-\frac{1}{2x\sqrt{x}})g'(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}) = (1+\frac{3}{2\sqrt{3x+1}})f'(x+\sqrt{3x+1}) \xrightarrow{x=1} \frac{3}{2}g'(3) = \frac{7}{4}f'(3) \Rightarrow g'(3) = \frac{7}{6}f'(3)$$

گروه آموزشی ماز

84- اگر $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-5$ باشد، آنگاه به موازات کدام خط می‌توان بر نمودار تابع f خطی مماس رسم کرد؟

۱) $3y+4x=5$
۲) $y+2x=4$
۳) $y=3x-2$
۴) $y=-4x+5$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۷ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

ابتدا $f'$ را به دست می‌آوریم:

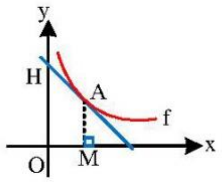
$$f'(x)=x^2-4x+3$$

$$f'(x)=(x-2)^2-1\Rightarrow f'(x)\geq -1$$

با توجه به آن‌که مشتق تابع مقدار شیب خط مماس را می‌دهد، می‌توانیم از فرض $f'(x)\geq -1$ نتیجه بگیریم شیب خط مماس حداقل $-1$ است. لذا تنها گزینه قابل قبول، گزینه ۳ است.

گروه آموزشی ماز

85- نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x^n}$ در شکل مقابل رسم شده است. اگر $OH=4AM$، عدد طبیعی n کدام است؟




۱)
۲)
۳)
۴)

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۶ و ۸۷ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

فرض می‌کنیم $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \frac{1}{\alpha^n}\end{matrix}\right.$ روی نمودار f باشد، معادله مماس بر f در A را می‌نویسیم:

$$f'(x)=\frac{-n}{x^{n+1}}\Rightarrow m=f'(\alpha)=\frac{-n}{\alpha^{n+1}}$$

$$y-\frac{1}{\alpha^n}=\frac{-n}{\alpha^{n+1}}(x-\alpha)$$

مماس را با محور عرض‌ها قطع می‌دهیم و $x=0$ را قرار می‌دهیم:

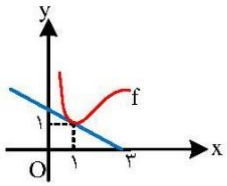
$$x=0\Rightarrow y=\frac{+n}{\alpha^n}+\frac{1}{\alpha^n}=\frac{1+n}{\alpha^n}\Rightarrow\begin{cases}OH=\frac{n+1}{\alpha^n}\\ AM=f(\alpha)=\frac{1}{\alpha^n}\end{cases}$$

طبق فرض:

$$OH=4AM\Rightarrow\frac{n+1}{\alpha^n}=4\times\frac{1}{\alpha^n}\Rightarrow n=3$$

گروه آموزشی ماز

86- شکل مقابل، بخشی از نمودار f است. شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=xf(\frac{۲}{\sqrt{x}})$ در $x=۴$ چه عددی است؟




۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲)

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۷ و ۸۸ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

خط رسم شده به معادله $y=\frac{-۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}=\frac{۳-x}{۲}$ است.

این خط در نقطه‌ای به طول $x=۱$ بر نمودار f مماس است. پس:

$$\begin{cases} f(۱)=۱ \\ \text{شیب خط}=f'(۱)\rightarrow f'(۱)=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

از طرفی:

$$y=xf(\frac{۲}{\sqrt{x}})\Rightarrow y'=f(\frac{۲}{\sqrt{x}})+\frac{-۱}{x\sqrt{x}}f'(\frac{۲}{\sqrt{x}}).x$$

$$y'(۴)=f(۱)-\frac{۱}{۸}f'(۱)\times ۴=f(۱)-\frac{۱}{۲}f'(۱)$$

$$y'(۴)=۱-\frac{۱}{۲}\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۵}{۴}$$

گروه آموزشی ماز

87- تابع $f(x)=x-\sqrt{x}$ با دامنه $[۱,۹]$ داده شده است. خطی که نقاط ابتدا و انتهای نمودار تابع را به هم وصل می‌کند، به موازات مماس در نقطه‌ای به طول $\alpha$ است، $f(\alpha)$ کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) ۳) ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۷ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

نقاط $A\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۹\\۶\end{matrix}\right.$ دو نقطه ابتدایی و انتهایی تابع است، پس:

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(۹)-f(۱)}{۹-۱}=\frac{(۹-۳)-(۱-۱)}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

از طرفی شیب خط مماس در $\alpha$ با $f'(\alpha)$ برابر است، پس:

$$f'(x)=۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲\sqrt{\alpha}}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \alpha=۴\Rightarrow f(\alpha)=۲$$

گروه آموزشی ماز

88- هرگاه $fog(x)=4x^4-6x^2+4$ و $g(x)=2x^3+\frac{1}{x}$، مقدار $f'(3)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{1}{20}$ ۴) $\frac{20}{3}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۶ تا ۸۸ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$\begin{cases} fog(x)=4x^4-6x^2+4 \xrightarrow{x=1} fog(1)=2 \\ g(x)=2x^3+\frac{1}{x} \Rightarrow g(1)=3 \end{cases}$$

از طرفی:

$$(fog)'(x)=g'(x).f'(g(x)) \quad , \quad g'(x)=6x^2-\frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(1)=5$$

$$fog(x)=4x^4-6x^2+4 \Rightarrow (fog)'(x)=16x^3-12x \Rightarrow (fog)'(1)=4 \Rightarrow 4=g'(1).f'(3) \Rightarrow 4=5\times f'(3) \Rightarrow f'(3)=\frac{4}{5}$$

گروه آموزشی ماز

89- هرگاه $f(x)=\frac{2x}{x+2}$، مقدار $\alpha$ کدام باشد تا تساوی $f'(\alpha)=f''(-\alpha-4)$ برقرار شود؟

۱) ۲) ۳) $-4$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۹۰ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا $f'$ و $f''$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f(x)=\frac{2x}{x+2} \Rightarrow f'(x)=\frac{4}{(x+2)^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{-8}{(x+2)^3}$$

$$f'(\alpha)=\frac{4}{(\alpha+2)^2}$$

$$f''(-\alpha-4)=\frac{-8}{(-\alpha-4+2)^3}=\frac{8}{(\alpha+2)^3}$$

$$\frac{4}{(\alpha+2)^2}=\frac{8}{(\alpha+2)^3} \Rightarrow \alpha+2=2 \Rightarrow \alpha=0$$

گروه آموزشی ماز

**90-** تابع $y=\frac{\sqrt[3]{x^3-3x}}{x}$ در چند نقطه از $\mathbb{R}$ مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۷۷ تا ۸۱ ـ متوسط)

**نکته:**

تابع $y=\sqrt[3]{(x-a)^n}$ به ازای $n=1$ و $n=2$ در $x=a$ مشتق‌ناپذیر است.

**نکته:**

اگر $a \notin D_f$، آن‌گاه f در a ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

**پاسخ تشریحی:**

در این تست، تابع در نقاط $x=0$ و $x=\pm\sqrt{3}$ مشتق‌ناپذیر است. $x^3-3x=0 \Rightarrow x=0,\pm\sqrt{3}$

گروه آموزشی ماز

**91-** با فرض $f(x)=2^x$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{4^a(2^{-x}-1)}{x}$ برابر کدام است؟

۱) $-f'_-(2a)$ ۲) $-2f'_-(2a)$ ۳) $f'_-(2a)$ ۴) $2f'_-(2a)$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۰ ـ ساده)

**نکته:**

$$\lim_{h\to 0^\pm}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_\pm(a)$$

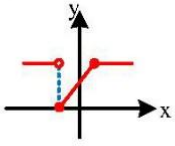
**پاسخ تشریحی:**

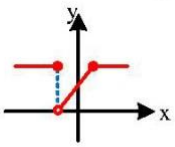
دقت کنید که هدف محاسبهٔ حد زیر است:

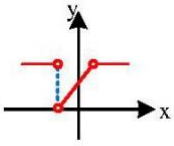
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{2a-x}-2^{2a}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(2a-x)-f(2a)}{x}=-f'_-(2a)$$

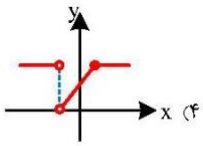
گروه آموزشی ماز

**92-** نمودار مشتق تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & |x|\le 1\\ 4x+3 & |x|>1\end{cases}$ کدام است؟

۱) 


۲) 


۳) 


۴) 


پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۷۷ تا ۸۰ ـ متوسط)

**نکته:**

اگر تابع f در a ناپیوسته باشد، در این نقطه مشتق‌ناپذیر است.

**پاسخ تشریحی:**

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=7\ ,\ \lim_{x\to 1^-}f(x)=3\ ,\ \lim_{x\to -1^+}f(x)=-1\ ,\ \lim_{x\to -1^-}f(x)=-1$$

پس f در $x=1$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است. در $x=-1$ تابع پیوسته است ولی مشتق چپ و راست نابرابرند، پس مشتق‌ناپذیر است.

بنابراین نمودار $f'$ در هر دو نقطه $x=1$ و $x=-1$ توخالی است.

$$f'(x)=\begin{cases}2x+2 & |x|<1\\ 4 & |x|>1\end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

93- تابع $f(x)=\begin{cases}|x^2-1| & x>1\\ x^2+ax+b & x\le 1\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۲) $-1$ ۳) ۴) $-3$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۷۷ تا ۸۰ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

کافی است پیوستگی و برابری مشتق چپ و راست تابع f را در نقطه $x=1$ بررسی کنیم:

۱) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Rightarrow 1+a+b=0$

۲) $f'(x)=\begin{cases}2x & x>1\\ 2x+a & x\le 1\end{cases}$

$f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow 2+a=2\Rightarrow a=0$

$b=-1\Rightarrow a-b=1$

گروه آموزشی ماز

94- اگر $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{2x-[x]}$ و $f'_+(1)-f'_-(1)=3$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۲) ۳) $-2$ ۴) $-5$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۰ ـ دشوار)

**نکته:**

تابع $y=[ax]$ به ازای $a>0$، در نقاطی که ax صحیح است، فقط مشتق راست دارد.

**پاسخ تشریحی:**

در مخرج کسر به دلیل وجود $[x]$، تابع f در $x=1$ مشتق چپ ندارد مگر آن‌که صورت کسر در این نقطه برابر صفر شود:

$$x^2+ax+b=0\xrightarrow{x=1}1+a+b=0$$

حال برای محاسبهٔ مشتق چپ و راست، از صورت مشتق می‌گیریم و از مخرج حد:

$$f'_+(1)=\frac{2x+a}{\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-[x])}=\frac{2+a}{1}$$

$$f'_-(1)=\frac{2x+a}{\lim\limits_{x\to 1^-}(2x-[x])}=\frac{2+a}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{2+a}{1}-\frac{2+a}{2}=3\Rightarrow a=4\Rightarrow b=-5$$

گروه آموزشی ماز

**95-** با فرض $f(x)=\left(\frac{2x-3}{x-2}\right)^2$، حاصل مشتق تابع $y=x\sqrt[3]{f(x)}$ در نقطهٔ $x=1$ چقدر است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۵ تا ۸۷ ـ متوسط)

**نکته:** $(fg)'=f'g+g'f$

**پاسخ تشریحی:**

$$(\sqrt[3]{f})'=\frac{f'}{3\sqrt[3]{f^2}}$$

ابتدا مشتق تابع f را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=2\left(\frac{2x-3}{x-2}\right)\left(\frac{2x-3}{x-2}\right)'=2\left(\frac{2x-3}{x-2}\right)\left(\frac{-1}{(x-2)^2}\right)=\frac{-4x+6}{(x-2)^3}$$

$$f'(1)=-2$$

حال مشتق تابع خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=\sqrt[3]{f(x)}+\frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f^2(x)}}x$$

$$y'(1)=\sqrt[3]{1}+\frac{-2}{3\sqrt[3]{1}}\times 1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

گروه آموزشی ماز

**96-** اگر تابع f در $x=4$ پیوسته و $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-4}{x-2\sqrt{x}}=\frac{2}{3}$ و $g(x)=2x-\sqrt{x+1}$ باشد، مشتق تابع $y=fog(x)$ در نقطهٔ $x=3$ چقدر است؟

۱) $\frac{7}{6}$ ۲) $\frac{7}{12}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{5}{12}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۷ و ۸۸ ـ متوسط)

**نکته۱:** $(fog)'(a)=g'(a).f'(g(a))$

**نکته۲:** $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

**پاسخ تشریحی:**

با توجه به فرض سوال، $f(4)=4$:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-4}{x-2\sqrt{x}}\times\frac{\overbrace{x+2\sqrt{x}}^{8}}{x+2\sqrt{x}}=\lim_{x\to 4}\frac{8(f(x)-4)}{x(x-4)}=\frac{8}{4}\times f'(4)=2f'(4)=\frac{2}{3}\Rightarrow f'(4)=\frac{1}{3}$$

از طرفی:

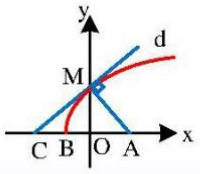
$$g'(x)=2-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\Rightarrow g'(3)=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

اکنون می‌توانیم مشتق fog را محاسبه کنیم:

$$y'=(fog)'(3)=g'(3).f'(g(3))=\frac{7}{4}\times f'(4)=\frac{7}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$

گروه آموزشی ماز

**97-** در شکل مقابل، نمودار تابع $y=\sqrt{x+a}$ و خط d مماس بر آن رسم شده است. به ازای کدام مقدار a، سه پاره‌خط OA، OB و BC برابرند؟




۱)

۲)

۳)

۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۶ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

چون $x_B=-a$، پس $x_C=-۲a$ و $x_A=a$، مثلث AMC قائم‌الزاویه است، پس:

$$OM^۲=OA\times OC\Rightarrow OM^۲=a\times ۲a\Rightarrow y_M=a\sqrt{۲}$$

شیب مماس در نقطه M برابر است با: $y'(۰)=\frac{۱}{۲\sqrt{a}}$

پس شیب AM برابر است با $-۲\sqrt{a}$.

$$-۲\sqrt{a}=m_{AM}=-\frac{OM}{OA}=-\frac{a\sqrt{۲}}{a}=-\sqrt{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

**98-** اگر $f(x)=x^۳-۲x+۲$ باشد، مشتق تابع $fof'$ در $x=۱$ چند برابر مشتق تابع $f'of$ در $x=۱$ است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۷ و ۸۸ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

ابتدا دقت کنید که:

$$f'(x)=۳x^۲-۲ \text{ و } f''(x)=۶x$$

حال مشتق‌های خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$y=fof'(x)\Rightarrow y'=f''(x).f'\big(f'(x)\big)$$
$$y'(۱)=f''(۱).f'(۱)=۶\times ۱=۶$$
$$y=f'of(x)\Rightarrow y'=f'(x).f''\big(f(x)\big)$$
$$y'(۱)=f'(۱).f''(۱)=۱\times ۶=۶$$

پس نسبت دو مشتق خواسته شده برابر ۱ است.

گروه آموزشی ماز

**99-** آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^۳-۳x^۲+۲$ در بازهٔ $[۱,۳]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در نقاط $x=\alpha$ و $x=\beta$ برابر است. آهنگ تغییر لحظه‌ای f در نقطهٔ $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۲) $-۱$ ۳) ۴) صفر

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۹۵ ـ متوسط)

**نکته:**

آهنگ تغییر متوسط f در بازهٔ $[a,b]$ برابر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ و آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطه $x=x_۰$ برابر $f'(x_۰)$ است.

**پاسخ تشریحی:**

$$f'(x)=3x^2-6x$$

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(x)\Rightarrow\frac{2-0}{2}=3x^2-6x\Rightarrow 3x^2-6x-1=0$$

$\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ بالا هستند، پس $\alpha+\beta=2$.

حال هدف، محاسبهٔ $f'(2)$ است:

$$f'(2)=12-12=0$$

گروه آموزشی ماز

**100- خط مماس بر تابع $y=\frac{1}{x}$ در $x=2$، خط مماس بر این تابع در $x=a$ را در نقطه‌ای به طول ۴- قطع می‌کند. a کدام است؟**

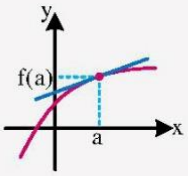
۱) ۲) $-1$ ۳) ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۷۱ و ۸۵ ـ متوسط)

**نکته مهم:**

معادله خط مماس بر تابع f در نقطه a به صورت زیر است:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$




**پاسخ تشریحی:**

معادلهٔ خط مماس بر تابع $y=\frac{1}{x}$ در $x=2$ را می‌نویسیم:

$$A(2,\frac{1}{2})\qquad y'=-\frac{1}{x^2}$$

خط مماس: $y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)\xrightarrow{x=-4}y-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow y=2\Rightarrow B(-4,2)$

معادلهٔ خط مماس بر تابع $y=\frac{1}{x}$ در $x=a$ را می‌نویسیم:

$$y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$$

این خط از نقطهٔ $B(-4,2)$ عبور می‌کند.

$$2-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(-4-a)\xrightarrow{\times a^2}2a^2-a=a+4\Rightarrow 2a^2-2a-4=0$$

$$\Rightarrow a^2-a-2=0\Rightarrow(a+1)(a-2)=0\Rightarrow\begin{cases}a=2 & \text{غ ق ق}\\ a=-1 & \checkmark\end{cases}$$

**سوالات منتخب:**

خط مماس بر منحنی $y=x^3+3x^2+1$، بر خط $x-3y=2$ عمود است. کدام نقطه روی این خط مماس قرار دارد؟

۱) $(1,3)$ ۲) $(1,4)$ ۳) $(2,-4)$ ۴) $(2,-6)$ ✓

گروه آموزشی ماز

101- اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 1\\ \frac{1}{x} & x<1\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1)-f(1-h^2)}{h^2}$ کدام است؟

۱) ۲) $-1$ ۳) ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۰ ـ متوسط)

**تعریف:**

مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad,\quad f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

یا به طور معادل:

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\quad,\quad f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

**قاعدهٔ هوپیتال:**

درمحاسبهٔ حد کسرهایی به فرم $\frac{f(x)}{g(x)}$ که به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ هستند، یکی از روش‌های رفع ابهام، آن است که به جای حد $\frac{f}{g}$، حد $\frac{f'}{g'}$ را حساب کنیم. یعنی:

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{x\to a}\frac{f'}{g'}$$

**پاسخ تشریحی:**

**روش اول:**

با فرض $-h^2=t$ خواهیم داشت:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1)-f(1-h^2)}{h^2}=\lim_{t\to 0^-}\frac{f(1)-f(1+t)}{-t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}=f'_-(1)$$

بنابراین:

$$f(x)=\frac{1}{x}\to f'(x)=-\frac{1}{x^2}\to f'_-(1)=-1$$

**روش دوم:**

برای رفع ابهام حد داده شده از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

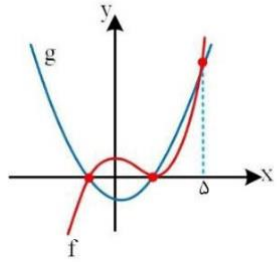
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1)-f(1-h^2)}{h^2}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to 0}\frac{2hf'(1-h^2)}{2h}=f'_-(1)=-1$$

**سوالات منتخب:**

اگر $f(x)=\begin{cases}x^2+3x & x\geq 1\\ 2x+2 & x<1\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)-f(1-2h^2)}{h^2-h^3}$ کدام است؟

۱) ۲) ۳) ✓ ۴) $+\infty$

102- تابع $f(x)=a(x+1)(x-2)^2$ مفروض و $g(x)$ سهمی است. اگر مماس‌های f و g در $x=-1$ بر هم عمود باشند، $g'(2)$ کدام است؟




۱)

۲)

۳)

۴)

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۷۹ و ۸۷ ـ دشوار)

**نکته مهم:**

اگر تابع g در a تعریف شده و دارای حد باشد و f در a مشتق‌پذیر و $f(a)=0$ باشد، آنگاه:

$$h(x)=f(x)g(x)\Rightarrow h'(x)=f'(a)\lim_{x\to a}g(x)$$

اگر تابع g در a پیوسته باشد:

$$h'(a)=f'(a)g(a)$$

**پاسخ تشریحی:**

صفرهای توابع f و g یکسان می‌باشند. بنابراین تابع g به صورت مقابل است:

$$g(x)=b(x+1)(x-2)$$

عبارت $x+1$ عامل صفرکنندهٔ f و g در $x=-1$ می‌باشد. در نتیجه:

$$f'(-1)=a(-1-2)^2=9a \qquad g'(-1)=b(-1-2)=-3b$$

مماس‌های f و g در $x=-1$ بر هم عمودند:

$$f'(-1)g'(-1)=-1\Rightarrow -27ab=-1\Rightarrow ab=\frac{1}{27}$$

توابع f و g یکدیگر را در $x=5$ قطع می‌کنند:

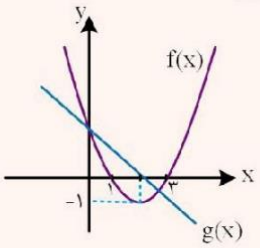
$$\left.\begin{array}{r} f(5)=g(5)\Rightarrow a(6)(3)^2=b(6)(3)\Rightarrow a=\frac{1}{3}b \\ ab=\frac{1}{27}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{3}b^2=\frac{1}{27}\Rightarrow b^2=\frac{1}{9}\xrightarrow{b>0} b=\frac{1}{3}$$

خواهیم داشت:

$$g(x)=\frac{1}{3}(x+1)(x-2)\Rightarrow g'(2)=\frac{1}{3}(2+1)=1$$

**سوالات منتخب:**

نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ و خط $g(x)$ مفروض است. اگر $h(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{-2g(x)}}$ باشد، حاصل $h'(3)$ کدام است؟



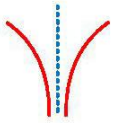

۱) $2\sqrt{3}$

۲) $-2\sqrt{3}$

۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ✓

۴) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

**103- نمودار مشتق تابع $y=f(x)$ در همسایگی $x=-1$ به صورت مقابل است. ضابطهٔ $f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟**



۱) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

۲) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}$

۳) $f(x)=\sqrt[3]{-x-1}$

۴) $f(x)=\sqrt[3]{-(x+1)^2}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸۱ ـ متوسط)

**نکته مهم:**

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی داشته باشد، در این صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a,f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

**نکته:**

در منحنی‌های $y=\sqrt[3]{(x-a)}$ و $y=\sqrt[3]{(x-a)^2}$، خط $x=a$ مماس قائم است.

**پاسخ تشریحی:**

با توجه به نمودار، $f'_+(-1)=-\infty$ و $f'_-(-1)=-\infty$ است.

**بررسی موارد:**

۱) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(-1)=+\infty\\ f'_-(-1)=+\infty\end{cases}$ ✗

۲) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(-1)=+\infty\\ f'_-(-1)=-\infty\end{cases}$ ✗

۳) $f(x)=\sqrt[3]{-x-1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(-x-1)^2}}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(-1)=-\infty\\ f'_-(-1)=-\infty\end{cases}$ ✓

۴) $f(x)=\sqrt[3]{-(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x+1}}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(-1)=-\infty\\ f'_-(-1)=+\infty\end{cases}$ ✗

گروه آموزشی ماز

**104- اگر $f(x)=k(x-3)(x-2)^2[-x]$ و $f'_+(a)-f'_-(a)=1$ باشد، مقدار $a+k$ کدام است؟**

۱) ۲) ۳) ۴)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۸۱ و ۸۲ ـ متوسط)

**تعریف نقطه گوشه:**

نقطه‌ای است که در آن تابع پیوسته است ولی نیم‌مماس‌های چپ و راست در آن نقطه هم‌راستا نیستند.

اگر $k\in\mathbb{Z}$ باشد:

تابع $y=[x]$ در $x=k$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

تابع $y=(x-k)[x]$ در $x=k$ پیوسته و مشتق‌ناپذیر است. (نقطه گوشه)

تابع $y=(x-k)^2[x]$ در $x=k$ مشتق‌پذیر است. $y'(k)=0$

**پاسخ تشریحی:**

$x=a$ در تابع f یک نقطه گوشه است زیرا نیم‌مماس‌های راست و چپ برابر نیستند.

تابع f در نقاط غیرصحیح پیوسته و مشتق‌پذیر است.

تابع f در نقاط صحیح به جز $x=2$ و $x=3$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر بوده و مشتق آن برابر صفر است.

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{k(x-۳)(x-۲)^۲[-x]-۰}{x-۲}=۰$$

تابع f در $x=۳$ پیوسته بوده ولی مشتق‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین $a=۳$ است.

$$\begin{cases} f'_+(۳)=k(x-۳)'(۳-۲)^۲\left[(-۳)^-\right]=-۴k \\ f'_-(۳)=k(x-۳)'(۳-۲)^۲\left[(-۳)^+\right]=-۳k \end{cases} \Rightarrow (-۴k)-(-۳k)=۱\Rightarrow k=-۱$$

در نتیجه: $a+k=۲$.

**سوالات منتخب:**

تابع $y=(x^۳+۳x^۲+ax+b)[x]$ در $x=۲$ مشتق‌پذیر است. حاصل $a+b$ کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۵۲ ۲) ۵۲− ۳) ۴− ۴) ✓

**گروه آموزشی ماز**

105- با فرض $f(x)=\frac{\sqrt{(\frac{۳x-۲}{x-۱})^۳}+۱}{x-۱}$، حاصل $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۳− ۲) ۶− ۳) ۱۲− ۴) ۱۵−

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۸۲ و ۸۷ ـ متوسط)

**نکته مهم:**

اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع $kf\ (k\in\mathbb{R})$، $f\pm g$، $fg$ و $\frac{f}{g}\ (g(a)\neq ۰)$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیرند و داریم:

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a)=kf'(a)$

پ) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

ت) $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^۲}$

۱) $y=u^n\Rightarrow y'=nu'u^{n-۱}$

۲) $y=\sqrt[m]{u^n}\Rightarrow y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}\Rightarrow\begin{cases}(\sqrt{x})'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\\(\sqrt[۳]{x^۲})'=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}\\(\sqrt[۳]{x})'=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\end{cases}$

۳) $y=\frac{au+b}{cu+d}\Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^۲}u'\Rightarrow\begin{cases}(\frac{۱}{x})'=-\frac{۱}{x^۲}\\(\frac{ax+b}{cx+d})'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^۲}\end{cases}$

**پاسخ تشریحی:**

با فرض $g(x)=\sqrt{(\frac{۳x-۲}{x-۱})^۳}+۱$ خواهیم داشت:

$$g(۲)=\sqrt{۶۴}+۱=۹$$

$$g(x)=(\frac{۳x-۲}{x-۱})^{\frac{۳}{۲}}+۱\Rightarrow g'(x)=\frac{۳}{۲}(\frac{۳x-۲}{x-۱})^{\frac{۱}{۲}}(\frac{۳x-۲}{x-۱})'=\frac{۳}{۲}(\frac{۳x-۲}{x-۱})^{\frac{۱}{۲}}(\frac{-۱}{(x-۱)^۲})$$

$$\Rightarrow g'(۲)=\frac{۳}{۲}(۴)^{\frac{۱}{۲}}(-۱)=-۳$$

بنابراین:

$$f(x)=\frac{g(x)}{x-1}\to f'(x)=\frac{g'(x)(x-1)-g(x)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(2)=g'(2)-g(2)=-3-9=-12$$

**سوالات منتخب:**

در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}})^3$، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ کدام است؟ (سراسری ۹۵ تجربی)

۱) $-21$ ✓ ۲) $-18$ ۳) ۴) ۱۵

گروه آموزشی ماز

**106-** تابع $f(x)=x|x|[x]$ در فاصله $(-2,2)$ به ترتیب از راست به چپ در چند نقطه مشتق اول و مشتق دوم ندارد؟

۱) ۲ − ۳ ۲) ۲ − ۲ ۳) ۳ − ۳ ۴) ۱ − ۲

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۸۸ تا ۹۱ ـ متوسط)

**نکته مهم:**

در بررسی مشتق‌پذیری توابع، ابتدا پیوستگی را بررسی نمایید.

مشتق دوم:

$$f''(x)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$$

به عبارت دیگر: $(f'(x))'=f''(x)$

**پاسخ تشریحی:**

تابع f در تمامی نقاط بازه به جز اعداد صحیح مشتق‌پذیر است. مشتق‌پذیری تابع را در $x=0$ و $x=\pm 1$ بررسی می‌کنیم.

تابع f در $x=\pm 1$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است. اما در $x=0$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x|x|[x]}{x-0}=0$$

بنابراین f در دو نقطه مشتق اول ندارد. می‌توان نتیجه گرفت مشتق دوم نیز در این نقاط وجود ندارد.

مشتق دوم تابع را در $x=0$ بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ x^2 & -1<x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 2x & -1<x<0\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}0 & 0<x<1\\ 2 & -1<x<0\end{cases}$$

تابع در $x=0$ نیز مشتق دوم ندارد. بنابراین $f'$ در ۲ نقطه و $f''$ در ۳ نقطه ناموجود است.

**سوالات منتخب:**

در تابع $f(x)=x^2[x]$ مجموع مشتق دوم چپ و مشتق دوم راست در $x=0$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۰ ۲) ۳) $-2$ ✓ ۴)

گروه آموزشی ماز

107- آهنگ متوسط تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ در فاصلهٔ $[۲,۴]$ از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=۲$، ۴ واحد بیشتر است. آهنگ لحظه‌ای $f'(x)$ در $x=۲$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳) $-۲$ ۴) $-۴$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۹۳ تا ۱۰۰ ـ متوسط)

**نکات طلایی:**

به طول کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a,a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه } [a,a+h] = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

همچنین آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطه } x=a = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابر است.

در تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$، آهنگ متوسط در بازه $[\alpha,\beta]$، با آهنگ لحظه‌ای در نقطه $\frac{\alpha+\beta}{۲}$ برابر است.

**پاسخ تشریحی:**

**روش اول:**

آهنگ متوسط تابع را در بازهٔ $[۲,۴]$ محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{f}_{[۲,۴]}=\frac{f(۴)-f(۲)}{۴-۲}=\frac{(۱۶a+۴b+c)-(۴a+۲b+c)}{۲}=۶a+b$$

می‌دانیم: $f'(x)=۲ax+b$

بنابراین: $x=۲$ در f آهنگ لحظه‌ای $=f'(۲)=۴a+b$

خواهیم داشت: $(۶a+b)-(۴a+b)=۴\Rightarrow a=۲$

آهنگ لحظه‌ای $f'$ در $x=۲$ همان $f''(۲)$ می‌باشد:

$$f''(x)=۲a\Rightarrow f''(۲)=۲a=۴$$

**روش دوم:**

$$\bar{f}_{[۲,۴]}=f'(۳)=۶a+b$$

ادامه راه‌حل مانند روش اول است.

**سوالات منتخب:**

در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{x}$، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=۲$، از آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۱,۴]$ کدام است؟ (سراسری ۹۸)

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ✓ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۷۵

گروه آموزشی ماز

108- اگر $f(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$ باشد، حاصل $g'^{۲}(x)f''og(x)+g''(x)f'og(x)$ در $x=۸$ کدام است؟

۱) $\frac{۶۴}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۴۴}$ ۳) $-\frac{۶۴}{۹}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۴۴}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۸۷ و ۹۰ ـ دشوار)

**مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری**

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد:

$$y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u)$$

**پاسخ تشریحی:**

دقت داشته باشید:

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))\Rightarrow (fog)''(x)=g''(x)f'(g(x))+(g'(x))^{۲}f''(g(x))$$

کافیست $(fog)''(x)$ محاسبه شود:

$$(fog)(x)=\sqrt[۳]{g^{۲}+۱}=\sqrt[۳]{x}=x^{\frac{۱}{۳}}$$

$$\Rightarrow (fog)'(x)=\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}\Rightarrow (fog)''(x)=-\frac{۲}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}\Rightarrow (fog)''(۸)=-\frac{۲}{۹}\times ۲^{-۵}=-\frac{۲}{۹}\times\frac{۱}{۳۲}=-\frac{۱}{۱۴۴}$$

**سوالات منتخب:**

اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$ و $g(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$، حاصل $f'(x).g'(f(x))$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۲)

۱) $-۱$ ۲) ✓ ۳) $x$ ۴) $\frac{۱}{۲}x$

**گروه آموزشی ماز**

**109**- با توجه به نمودار توابع در $[a,b]$، در کدام تابع آهنگ متوسط در بازه $[a,b]$ از آهنگ لحظه‌ای در $x=b$ کمتر است؟

۱)
۲)
۳)
۴)

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۹۳ تا ۱۰۰ ـ ساده)

**پاسخ تشریحی:**

آهنگ متوسط، شیب خط واصل بین نقاط ابتدایی و انتهایی بازه است. در گزینهٔ ۳ شیب این خط از شیب خط مماس بر تابع در $x=b$ کمتر است.

**گروه آموزشی ماز**

**110**- شیب خطی که از دو نقطه $A(۳,f(۳))$ و $B(x,f(x))$ می‌گذرد را محاسبه کرده و به جواب $\frac{۲-\sqrt{x+۱}}{۴(x-۳)}$ رسیده‌ایم. مشتق تابع $f(x)$ در $x=۳$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۷۱ تا ۷٤ ـ ساده)

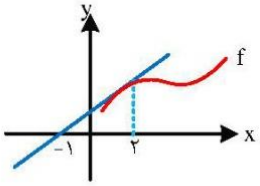
**پاسخ تشریحی:**

اگر $x$ را به ۳ میل دهیم، شیب خط قاطع به شیب خط مماس در نقطه $x=۳$ تبدیل می‌شود.

$$f'(۳)=\text{مماس}\ m=\lim_{x\to ۳}\frac{۲-\sqrt{x+۱}}{۴(x-۳)}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \lim_{x\to ۳}\frac{(۴-x-۱)}{۴(x-۳)(۲+\sqrt{x+۱})}=\frac{-۱}{۴\times ۴}=-\frac{۱}{۱۶}$$

**گروه آموزشی ماز**

**111**- در شکل زیر، نمودار تابع **f** و خط مماس بر آن در $x=۲$ رسم شده است. اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{۳h}=\frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $f(۲)$ کدام است؟




۱) ۴/۵
۲)
۳) ۵
۴) ۵/۵

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ _ صفحات ۷۱ تا ۷۴ _ ساده)

**پاسخ تشریحی:**

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{۳h}=\frac{۱}{۳}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\frac{۳}{۲}$$

$$\text{مماس } m=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{f(۲)}{۲-(-۱)}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(۲)=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

گروه آموزشی ماز

**112**- با توجه به نمودار تابع $f(x)=\sin x$ کدام‌یک از مقادیر زیر منفی است؟

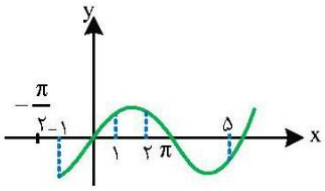
۱) $f'(۲)$ ۲) $f'(۱)$ ۳) $f'(۵)$ ۴) $f'(-۱)$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ _ صفحات ۶۹ تا ۷۴ _ ساده)

**پاسخ تشریحی:**

با توجه به نمودار در نقطه $x=۲$ مماس دارای شیب منفی خواهد بود، پس $f'(۲)<۰$. توجه کنید که $\pi\simeq ۳/۱۴$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{۲}<-۱<۱<\frac{\pi}{۲}<۲<\frac{۳\pi}{۲}<۵<۲\pi$$




گروه آموزشی ماز

113- هرگاه تابع $f(x)=\left||x-۲|+a\right|$ در نقطه $x=۴$ مشتق‌ناپذیر باشد، جمع طول نقاط مشتق‌ناپذیر f کدام است؟

۱) ۲) ۳) ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۷۷ تا ۸۲ ـ ساده)

**پاسخ تشریحی:**

چون در $x=۴$ مشتق‌ناپذیر است، پس $x=۴$ ریشه داخل قدرمطلق است:

$$|۴-۲|+a=۰ \Rightarrow a=-۲$$

پس: $f(x)=\left||x-۲|-۲\right|$

لذا نقاط مشتق‌ناپذیر عبارتند از:

$$|x-۲|=۲ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ x=۰ \end{cases}$$

از طرفی، تابع در $x=۲$ هم مشتق‌ناپذیر است. پس جمع طول نقاط مشتق‌ناپذیر $۰+۲+۴=۶$ است.

گروه آموزشی ماز

114- اگر $f(x)=x\sqrt[۳]{۴+\frac{۸}{x}}$ باشد، مقدار $f'(۲)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۸۲ تا ۸۹ ـ ساده)

**پاسخ تشریحی:**

ابتدا f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt[۳]{۴x^۳+۸x^۲}$$

$$f'(x)=\frac{۱۲x^۲+۱۶x}{۳\sqrt[۳]{(۴x^۳+۸x^۲)^۲}} \Rightarrow f'(۲)=\frac{۴۸+۳۲}{۳\sqrt[۳]{(۶۴)^۲}}$$

$$f'(۲)=\frac{۸۰}{۳\times ۱۶}=\frac{۵}{۳}$$

گروه آموزشی ماز

115- اگر $f(x)=(x+۲)\sqrt[۳]{x+۲}$ باشد، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f^۲(h-۱)+f(h-۱)-۲}{h(۱-h^۲)}$، چه عددی است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۳) ۴)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۸۲ تا ۸۸ ـ دشوار)

**پاسخ تشریحی:**

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۲(h-۱)+f(h-۱)-۲}{h(۱-h^۲)}=\lim_{h\to ۰}\frac{\big(f(h-۱)-۱\big)\big(f(h-۱)+۲\big)}{h\times ۱}$$

با توجه به آن‌که $f(-۱)=۱$ و طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}=f'(-۱)$$

پس داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\left(\frac{f(-۱+h)-۱}{h}\times\frac{\overset{۱}{\cancel{f(-۱+h)}}+۲}{۱}\right)=۳f'(-۱)$$

یعنی اگر $f'(-1)$ را بدست آوریم، مقدار حد به دست می‌آید.

$$f'(x)=\sqrt[3]{x+2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}(x+2)\Rightarrow f'(-1)=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\text{مقدار حد}=3\times\frac{4}{3}=4$$

گروه آموزشی ماز

**116-** معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+ax-1}{x+2}$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ به صورت $4x+b=3y$ است. مقدار $a+b$ چه عددی است؟

۱) ۲ ۲) $-2$ ۳) $-4$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۸٦ و ۸۷ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

شیب خط مماس برابر $\frac{4}{3}$ است، پس $f'(1)=\frac{4}{3}$، به همین جهت:

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x+2)-(x^2+ax-1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(1)=\frac{3(2+a)-a}{9}=\frac{6+2a}{9}=\frac{4}{3}\Rightarrow 6+2a=12\Rightarrow a=3$$

از طرفی، مقدار تابع و مقدار خط مماس در $x=1$ برابرند. یعنی:

$$f(x)=\frac{x^2+3x-1}{x+2}\Rightarrow f(1)=1\Rightarrow A(1,1)\in \text{خط مماس}$$

$$4+b=3\Rightarrow b=-1\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=-1\end{cases}\Rightarrow a+b=2$$

گروه آموزشی ماز

**117-** هرگاه $f(x)=6x+\frac{a}{x}$ باشد، به طوری که $f'(1)=f''(1)$، مقدار $a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-2$ ۳) ۳ ۴) $-4$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۸۲ تا ۸۹ ـ ساده)

**پاسخ تشریحی:**

ابتدا $f'$ و $f''$ را بدست آورده و $x=1$ را در ضابطهٔ آن‌ها قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=6-\frac{a}{x^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{2a}{x^3}$$

اما $f'(1)=f''(1)$ است، پس:

$$6-\frac{a}{1}=\frac{2a}{1}\Rightarrow 6-a=2a\Rightarrow 3a=6\Rightarrow a=2$$

گروه آموزشی ماز

**118-** اگر $y=2x-3$، خط مماس بر نمودار تابع $y=g(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ باشد و $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{2x^2-3x+1}=\frac{-4}{3}$ باشد، مقدار $(fog)'(2)$ چه عددی است؟

۱) $-2$ ۲) $-4$ ۳) $-8$ ۴) $-\frac{8}{3}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۸۷ و ۸۸ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

چون $y=2x-3$ بر $y=g(x)$ در $x=2$ مماس است، پس: $g(2)=1\ ,\ g'(2)=2$

از طرفی:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(2x-1)}=f'(1)$$

یعنی: $f'(۱) = -\frac{۴}{۳}$

به این ترتیب: $(fog)'(۲) = g'(۲).f'(g(۲)) = ۲\times f'(۱) = ۲\times -\frac{۴}{۳} = -\frac{۸}{۳}$

گروه آموزشی ماز

**119-** خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۲}{\sqrt{x}}$ در نقطه‌ای به طول $x=۱$، نیمساز ناحیه دوم و چهارم را در نقطه M قطع می‌کند. فاصله M تا مبدأ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۸٦ و ۸۷ ـ متوسط)

**پاسخ تشریحی:**

ابتدا نقطه تماس را بدست می‌آوریم: $A\left|\begin{matrix}۱\\ f(۱)=-۱\end{matrix}\right. \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۱\\ -۱\end{matrix}\right.$

سپس شیب خط مماس را می‌یابیم:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x-۲)}{x} \Rightarrow f'(۱) = \frac{۱+\frac{۱}{۲}}{۱} = \frac{۳}{۲}$$

معادله خط مماس: $y = \frac{۳}{۲}x - \frac{۵}{۲}$

حال خط مماس را با نیمساز ناحیه دوم و چهارم قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = \frac{۳}{۲}x - \frac{۵}{۲} \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow -x = \frac{۳}{۲}x - \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۵}{۲}x = \frac{۵}{۲} \Rightarrow x = ۱$$

در $M\left|\begin{matrix}۱\\ -۱\end{matrix}\right.$ یکدیگر را قطع می‌کنند. پس: $OM = \sqrt{۲}$

گروه آموزشی ماز

**120-** آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=۲x-\sqrt{x}$ در بازه $[۱,a]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=۴$ برابر است. مقدار آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۶}$ ۲) $\frac{۲۳}{۶}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۹۳ تا ۹۸ ـ ساده)

**پاسخ تشریحی:**

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(a)-f(۱)}{a-۱} = \frac{۲a-\sqrt{a}-(۲-۱)}{a-۱} = \frac{۲a-\sqrt{a}-۱}{a-۱} = \frac{(\sqrt{a}-۱)(۲\sqrt{a}+۱)}{(\sqrt{a}-۱)(\sqrt{a}+۱)} = \frac{۲\sqrt{a}+۱}{\sqrt{a}+۱}$$

از طرفی: $f'(x) = ۲-\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۴) = ۲-\frac{۱}{۴} = \frac{۷}{۴}$

پس: $\frac{۲\sqrt{a}+۱}{\sqrt{a}+۱} = \frac{۷}{۴} \Rightarrow ۸\sqrt{a}+۴ = ۷\sqrt{a}+۷ \Rightarrow \sqrt{a} = ۳ \Rightarrow a = ۹$

$f'(۹) = ۲-\frac{۱}{۶} = \frac{۱۱}{۶}$

گروه آموزشی ماز

شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

www.mapedu.ir

۱ گزینه ۴ درست است.

$$f(x)=\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}=-(x+\sqrt{x^2+1})\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=-1$$

مشتق تابع ثابت برابر صفر است یعنی $f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0$

۲ گزینه ۳ درست است.

$$y=(\sin\sqrt{x})^2\Rightarrow y'=2(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x})\sin\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(2\sqrt{x})$$

در نتیجه $y'(\frac{\pi^2}{16})=\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$

۳ گزینه ۳ درست است.

$$y=(\frac{x}{\sqrt{x}}+1)^{\frac{1}{3}}=(\sqrt{x}+1)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow y'=\frac{1}{3}(\frac{1}{2\sqrt{x}})(\sqrt{x}+1)^{-\frac{2}{3}}$$

به ازای $x=4$ مقدار مشتق برابر است با $\frac{1}{12\sqrt[3]{9}}$

۴ گزینه ۱ درست است.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin 2x\ ; & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ -\frac{1}{2}\sin 2x\ ; & \frac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}\Rightarrow f'_-(\frac{\pi}{2})\times f'_+(\frac{\pi}{2})=-1(1)=-1$$

۵ گزینه ۴ درست است.

$$y'=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\Rightarrow y''=-2\frac{(1+x^2)^2-4x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

اگر $y''=0$ باشد $1+x^2=4x^2$ یا $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ پس $2x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

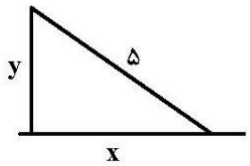
۶ گزینه ۱ درست است.

به ازای $x=3$ مقدار $\sin y=\frac{1}{2}$ و $\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $y'\cos y=\frac{5}{(3x+1)^2}$

در نتیجه $y'(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{1}{20}$ یا $y'=\frac{1}{30}\sqrt{3}$

۷ گزینه ۲ درست است.

$$y=\sqrt{25-x^2}\Rightarrow y'=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}\cdot x'$$




در حالت $x=3\ ,\ x'=0/02$ داریم $y'=\frac{-3}{4}(0/02)=0/015$

۸ . گزینه ۱ درست است.

اگر به فرم $f(x)=(1-x)\frac{1+x}{1+x^2}$ در نظر بگیریم $f'(s)=-\frac{1+1}{1+x^2}1$ و برابر ۱- است.

۹. گزینه ۱ درست است.

شیب خط مماس برابر مشتق تابع است. $y'=\frac{1}{2}x^2-x+1 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2-x+1=\frac{5}{2}$

در نتیجه $x^2-2x-3=0$ پس نقطه تماس $A(3,3)$ با جانشینی دو معادله خط $a=-9$

۱۰ گزینه ۳ درست است.

شیب خط مماس در هر نقطه به طول $a$ برابر $m=-3a^2+6a-4$ است که بیشترین شیب در $a=-\frac{6}{2(-3)}=1$ است.

۱۱ گزینه ۲ درست است.

چون تابع در $x=2$ پیوسته و $f'(2^+)=12-1=11$ و $f(2^-)=12+1=13$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2-h)-f(2)}{2h}-\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{2h}=\frac{-f'(2^+)-f'(2^-)}{2}$$

$$=\frac{-11-13}{2}=-12$$

۱۲ گزینه ۴ درست است.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\times\frac{f(2+h)+f(2)}{5}=12$$

$$f'(2)\times\frac{2f(2)}{5}=12$$

$$f'(2)\times\frac{2\times(-1)}{5}=12$$

$$\boxed{f'(2)=-30}$$

$$(f^3(x)+\frac{1}{f(x)})'=3f^2(x)\times f'(x)-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$\xrightarrow{x=2} \text{مشتق عبارت در } x=2 \quad =3f^2(2)\times f'(2)-\frac{f'(2)}{f^2(2)}=3(-1)^2\times(-30)-\frac{-30}{(-1)^2}=-60$$

**۱۳ گزینه ۳ درست است.**

برای تابع صعودی می‌بایست $y' > ۰$ و برای آهنگ تغییرات کاهشی می‌بایست $y'' < ۰$ باشد.

$$y' = ۳x^۲ - ۱۲x - ۱۵ = ۳(x^۲ - ۴x - ۵) > ۰ \Rightarrow x < -۱ \text{ یا } x > ۵$$

$$۲x - ۴ < ۰ \Rightarrow x < ۲ \Rightarrow x \in (-\infty, -۱)$$

**۱۴ گزینه ۱ درست است.**

$$\text{آهنگ متوسط رشد در بازه } [۸ \text{ و } ۶۴] = \frac{f(۶۴) - f(۸)}{۶۴ - ۸} = \frac{۱۵۸ - ۱۰۴}{۵۶} = \frac{۵۴}{۵۶} = \frac{۲۷}{۲۸}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای در ماه بیست و هفتم} = f'(۲۷) \Rightarrow f'(x) = ۲۷ \times \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$f'(۲۷) = \frac{۲۷}{۳\sqrt[۳]{۲۷^۲}} = \frac{۲۷}{۲۷} = ۱$$

$$\frac{\text{آهنگ متوسط}}{\text{آهنگ لحظه‌ای}} = \frac{\frac{۲۷}{۲۸}}{\frac{۱}{۱}} = \frac{۲۷}{۲۸}$$

**۱۵ گزینه ۳ درست است.**

می‌دانیم شیب خط مماس برابر مشتق تابع f در آن نقطه است. پس:

$$\text{مماس } m = ۲ \rightarrow f'(۱) = ۲$$

از طرفی مختصات نقطه تماس هم در تابع صدق می‌کند و هم در خط مماس. پس:

$$x = ۱ \xrightarrow{y = ۲x + ۱} y = ۳ \Rightarrow f(۱) = ۳$$

حال به محاسبه حدّ داده شده می‌پردازیم:

$$\lim_{x \to ۱} \frac{f^۲(x) + ۳f(x) - ۱۸}{x - ۱} \overset{\text{با تجزیه صورت}}{=} \frac{۰}{۰} = \lim_{x \to ۱} \frac{(f(x) - ۳)(f(x) + ۶)}{x - ۱}$$

$$= \lim_{x \to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} \times \lim_{x \to ۱} (f(x) + ۶)$$

$$= f'(۱) \times (f(۱) + ۶)$$

$$= ۲ \times (۳ + ۶) = ۱۸$$

**۱۶ گزینه ۴ درست است.**

عبارت $f(x)$ را بر $x^{۲}-۱$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x^{۳۲}-۱}{x^{۲}-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳۲x^{۳۱}(x^{۲}-۱)-۲x(x^{۳۲}-۱)}{x^{۲}-۱}=\frac{۳۰x^{۳۳}-۳۲x^{۳۱}+۲x}{x^{۲}-۱}\Rightarrow$$

$$f'(\sqrt{۲})=(۱۵\times ۲^{۱۷}-۲^{۲۰}+۲)\sqrt{۲}=(۷\times ۲^{۱۷}+۲)\sqrt{۲}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(h+\sqrt{۲})-f(\sqrt{۲}-h)}{h\sqrt{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}f'(\sqrt{۲})=۱۴\times ۲^{۱۷}+۴$$

**۱۷ گزینه ۴ درست است.**

با توجه به خواص توابع قدرمطلق و چند ضابطه‌ای، از آنجایی که تابع در $x=۳$ پیوسته است، داریم:

$$\begin{cases} x-۲=۰\Rightarrow x=۲<۳\Rightarrow f(۲)=۲\Rightarrow y=۲(۲)-۲=۲ \\ x^{۲}+۲x=۰\Rightarrow x=۰,-۲\not>۳\ ,\ x=۳\Rightarrow f(۳)=۴\Rightarrow y=۲(۴)-۲=۶ \end{cases}\Rightarrow ۲+۶=۸$$

**۱۸. گزینه ۲ درست است.**

$$\frac{f(۳)-f(۱)}{۳-۱}=\frac{-۹+۳a-(-۳+a)}{۲}=a-۳$$

پس یک واحد بیشتر است.

$$f'(۲)=۱۲-۱۶+a=-۴+a$$

**۱۹ گزینه ۴ درست است.**

شیب خط واصل به عدد $f'(۱)$ نزدیک می‌شود.

$$f'(x)=\frac{(۸x+۳)(x+\sqrt{x}+۱)-(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(۴x^{۲}+۳x)}{(x+\sqrt{x}+۱)^{۲}}\Rightarrow f'(۱)=۲/۵$$

**۲۰ گزینه ۴ درست است.**

$$y'=۲f'(-۱)+۳f'(-۱)f'(f(-۱))=۵$$

**۲۱ گزینه ۳ درست است.**

تابع در $x=۱$ نیز مشتق‌پذیر است.

$$L_{۱}=a+b\ ,\ L_{۲}=۳+a\ ,\ L_{۱}=L_{۲}\Rightarrow b=۳$$

$$f'(۱^{+})=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۱}}+a\ ,\ f'(۱^{-})=۲a+۳\Rightarrow a=-۱\Rightarrow b-a=۴$$

**۲۲ گزینه ۳ درست است.**

$$f'(x)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{۱۲-۲}{۹-۱}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow x=۴$$

**۲۳. گزینه ۴ درست است.**

حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0)-f(x)}{2x}$ برابر $-\frac{1}{2}f'(x)$ است پس:

$$2f(x)f'(x)=6f'(x)+8x+20 \Rightarrow 2f(0)f'(0)=6f'(0)+20$$

حال کافی است $f(0)$ را به دست آوریم:

$$f^2(0)=6f(0)+16 \Rightarrow f^2(0)-6f(0)-16=0 \Rightarrow (f(0)-8)(f(0)+2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0)=8 \\ f(0)=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(0)=8 \Rightarrow 16f'(0)=6f'(0)+20 \Rightarrow f'(0)=2 \\ f(0)=-2 \Rightarrow 4f'(0)=6f'(0)+20 \Rightarrow f'(0)=-10 \end{cases}$$

چون $y=f(x)$ اکیداً صعودی است پس $f'(0)$ باید مثبت باشد و این یعنی $f'(0)=2$ قابل قبول است پس:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(0)-f(x)}{2x}=-\frac{1}{2}f'(0)=-\frac{1}{2}\times 2=-1$$

**۲۴ گزینه ۳ درست است.**

با توجه به داده‌های سؤال داریم:

$$\begin{cases} f'(2)=2\ ,\ f(2)=-1 \\ g'(0)=2\ ,\ g(0)=-5 \end{cases}$$

حال مقدار $h'(1)$ را به دست می‌آوریم:

$$h'(x)=f'(x+1)g(1-x)+g'(1-x)\times(-1)\times f(x+1)$$
$$\Rightarrow h'(1)=f'(2)g(0)-g'(0)f(2) \Rightarrow h'(1)=2\times(-5)-(2)\times(-1)=-8$$

**۲۵ گزینه ۱ درست است.**

ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را ساده کرده، سپس $f'(1)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{3(x^2+1)}\right)^3 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{27}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^3=\frac{1}{27}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{27}\times(-\frac{3}{2})\times(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}\times 2x \Rightarrow f'(1)=\frac{1}{27}\times(-\frac{3}{2})\times 2^{-\frac{5}{2}}\times 2$$

$$\Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{9}\times\frac{1}{\sqrt{32}}=\frac{-1}{36\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{72}$$

**۲۶. گزینه ۱ درست است.**

چون نقطهٔ $(3,-2)$ اکسترمم تابع $f(x)$ است، پس $f'(3)=0$ و $f(3)=-2$ است. حال داریم:

$$h(x)=\frac{f^2(x)}{x^2+3} \Rightarrow h'(x)=\frac{(2f(x)f'(x))(x^2+3)-2x\times f^2(x)}{(x^2+3)^2} \Rightarrow h'(3)=\frac{-6\times 4}{12^2}=-\frac{1}{6}$$

**۲۷. گزینه ۲ درست است.**

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^{۲}+x}-\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^{۲}+x}}\times(x-a)}{x^{۲}+x}\xrightarrow{f'(-۲)=۰}\sqrt{۲}-\frac{-۳}{۲\sqrt{۲}}\times(-۲-a)=۰$$

$$\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}(-۲-a)=-\sqrt{۲}\Rightarrow ۳(-۲-a)=-۴\Rightarrow -۲-a=-\frac{۴}{۳}\Rightarrow a=-۲+\frac{۴}{۳}=-\frac{۲}{۳}$$

**۲۸. گزینه ۳ درست است.**

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{gof(۸)-gof(۵)}{۳}=\frac{g(f(۸))-g(f(۵))}{۳}=\frac{۵-۴}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای در } x=۵=\frac{۱}{۲\sqrt{۱۶}}\times ۳=\frac{۳}{۸}\Leftarrow x=۵ \text{ آهنگ تغییر لحظه‌ای در } g'(f(۵))\times f'(۵)=$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر $\frac{۳}{۸}-\frac{۱}{۳}=\frac{۹-۸}{۲۴}=\frac{۱}{۲۴}$ است.

**۲۹. گزینه ۱ درست است.**

معادلهٔ خط، $۲x+y=۸$ می‌باشد. با دوران مستطیل حول محور $y$ها یک استوانه با شعاع قاعدهٔ $x$ و ارتفاع $۸-۲x$ حاصل می‌شود. پس:

$$V=\pi x^{۲}\times(۸-۲x)\Rightarrow V'=۲\pi x(۸-۲x)+(-۲)(\pi x^{۲})=۰$$

$$۲\pi x(۸-۲x-x)=۰\Rightarrow x=\frac{۸}{۳}\Rightarrow V=\pi(\frac{۸}{۳})^{۲}(۸-\frac{۱۶}{۳})=(\frac{۸}{۳})^{۳}\times\pi=\frac{۵۱۲}{۲۷}\pi$$

**۳۰ گزینه ۱ درست است.**

می‌دانیم حاصل حد خواسته شده برابر $f'(\sqrt{۶})$ است. پس:

$$f'(x)=۱\times\sqrt[۳]{x^{۲}+۲}+\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^{۲}+۲)^{۲}}}\times(x+۱)\Rightarrow f'(\sqrt{۶})=۱\times ۲+\frac{۲\sqrt{۶}\times(\sqrt{۶}+۱)}{۳\times ۴}$$

$$=۲+\frac{۱۲+۲\sqrt{۶}}{۱۲}=۳+\frac{\sqrt{۶}}{۶}$$

**گزینه ۱ درست است.**

**۳۱** با توجه به داده‌های سؤال داریم:

$$f(۱)=۲\quad,\quad f'(۱)=\frac{۲-۰}{۱-(-۲)}=\frac{۲}{۳}$$

حال از طرفین تساوی $g(x)=(x^{۲}+ax)f(x)$ مشتق می‌گیریم و داریم:

$$g'(x)=(۲x+a)f(x)+f'(x)(x^{۲}+ax)\Rightarrow g'(۱)=(۲+a)f(۱)+f'(۱)(۱+a)$$

$$\Rightarrow ۱۰=(۲+a)\times ۲+\frac{۲}{۳}\times(۱+a)\Rightarrow ۴+۲a+\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۳}a=۱۰\Rightarrow\frac{۸}{۳}a=\frac{۱۶}{۳}\Rightarrow a=۲$$

**۳۲ گزینه ۱ درست است.**

ابتدا آهنگ متوسط را به دست می‌آوریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(۹)-f(۴)}{۵} = \frac{۰-(\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۲})}{۵} = \frac{۱}{۶}$$

حال داریم:

$$f(x)=\frac{x-۹}{۳\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۹)=۱\times\frac{۱}{۳\sqrt{۹}}=\frac{۱}{۹}$$

بنابراین آهنگ متوسط تغییر به مقدار $\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۹}=\frac{۱}{۱۸}$ از آهنگ لحظه‌ای تغییر بیشتر است.

**۳۳ گزینه ۲ درست است.**

$$v=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \quad , r'_t=۲\frac{cm}{s}$$

$$v'_t=۴\pi r^{۲}.r'_t=۴\pi\times۱۲^{۲}\times۲=۱۱۵۲\pi\frac{cm^{۳}}{s}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{\frac{۴}{۳}\pi(۱۲)^{۳}-\frac{۴}{۳}\pi(۹)^{۳}}{۱۲-۹}=\frac{\frac{۴}{۳}\pi\cancel{(۳)}(۱۴۴+۱۰۸+۸۱)}{\cancel{۳}}=۴۴۴\pi$$

$$۱۱۵۲\pi-۴۴۴\pi=۷۰۸\pi$$

**۳۴ گزینه ۳ درست است.**

F نزولی بنابراین $f'<۰$ است. نمودار $f'$ زیر محور xها قرار دارد.

**۳۵ گزینه ۱ درست است.**

$$F'(x)=(gof)'(x)=f'(x).g'(f(x))$$

$$=(|x|+\frac{x^{۲}}{|x|}).\sqrt{۴-(x|x|)^{۲}}=۲|x|.\sqrt{۴-x^{۴}}$$

**۳۶ گزینه ۱ درست است.**

$$\lim_{h\to۰}(\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}\times\frac{f(۲+h)+f(۲)}{۵})=۱۲$$

$$f'(۲)\times\frac{۲f(۲)}{۵}=۱۲$$

$$f'(۲)\times\frac{۲(-۲)}{۵}=۱۲\boxed{f'(۲)=-۱۵}$$

$$(f^{۴}(x)-\frac{۴}{f(x)})'=۴f^{۳}(x)\times f'(x)-\frac{۰\times f(x)-f'(x)\times۴}{f^{۲}(x)}$$

$$\xrightarrow{x=۲}۴f^{۳}(۲)\times f'(۲)+\frac{۴f'(۲)}{f^{۲}(۲)}=۴(-۲)^{۳}\times(-۱۵)+\frac{۴(-۱۵)}{(-۲)^{۲}}=۴۶۵$$

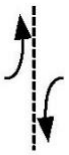
**۳۷. گزینه ۳ درست است.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^-} y = \lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{-۲}{\sqrt[۳]{۲-f}} = \dfrac{-۲}{\sqrt[۳]{۲-۲^+}} = \dfrac{-۲}{۰^-} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to ۲^+} y = \lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{-۲}{\sqrt[۳]{۲-f}} = \dfrac{-۲}{\sqrt[۳]{۲-۲^-}} = \dfrac{-۲}{۰^+} = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow$$

$x = ۲$

**۳۸ گزینه ۴ درست است.**

$$f'(x) = ۱ - \frac{۲(-۱)}{۳\sqrt[۳]{۲-x}} \begin{cases} x \to ۲^+ : f'(x) \to -\infty \\ x \to ۲^- : f'(x) \to +\infty \end{cases}$$



$x = ۲$

**۳۹ . گزینه ۲ درست است.**

عبارت داخل قدر مطلق در همسایگی $x = ۲$ از نظر علامت منفی است، بنابراین: $|۳ - x^۲| = x^۲ - ۳$ و در نتیجه:

$$f(x) = x^۳ - ۳x \to f'(x) = ۳x^۲ - ۳ \to \boxed{f'(۲) = ۹}$$

از طرف دیگر آهنگ متوسط برابر است با:

$$\frac{f(۲) - f(-۳)}{۲-(-۳)} = \frac{۲-(-۱۸)}{۵} = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

مجموع مقادیر آهنگ لحظه‌ای و متوسط خواسته‌شده $= ۹ + ۴ = ۱۳$

**۴۰ . گزینه ۳ درست است.**

شرط پیوستگی: $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱) \Rightarrow \boxed{b + c = a}$ ①

$$f'(x) = \begin{cases} ۲ax \ ; \ x < ۱ \\ b - \dfrac{c}{x^۲} \ ; \ x > ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{f در x=۱ مشتق‌پذیر است}} \boxed{۲a = b - c} \ ②$$

$$f''(x) = \begin{cases} ۲a \ ; \ x < ۱ \\ \dfrac{۲c}{x^۳} \ ; \ x > ۱ \end{cases} \begin{cases} f''_-(۱) = ۲a \\ f''_+(۱) = ۲c \end{cases} \to f''_+(۱) + f''_-(۱) = ۲ \to ۲c + ۲a = ۲ \to \boxed{a + c = ۱} \ ③$$

①و②و③ $\Rightarrow a = ۲, b = ۳, c = -۱ \Rightarrow a \times b \times c = -۶$

**۴۱ گزینه ۴ درست است.**

$$g(x)=f(۲-x^۳)\Rightarrow g'(x)=-۳x^۲f'(۲-x^۳)$$

از طرف دیگر:

$$f(x)=\frac{x-۱}{x-۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{(x-۲)^۲}\Rightarrow f'(۲-x^۳)=\frac{-۱}{((۲-x^۳)-۲)^۲}=\frac{-۱}{x^۶}$$

پس داریم:

$$g'(x)=-۳x^۲f'(۲-x^۳)\Rightarrow g'(x)=-۳x^۲\times\frac{-۱}{x^۶}=\frac{۳}{x^۴}=۳x^{-۴}$$

$$g''(x)=۳(-۴)x^{-۵}=\frac{-۱۲}{x^۵}\Rightarrow g''(x-۱)=\frac{-۱۲}{(x-۱)^۵}$$

$$\begin{cases} x\to ۱^{+}:\dfrac{-۱۲}{\overset{+}{۰}}=-\infty \\ x\to ۱^{-}:\dfrac{-۱۲}{\overset{-}{۰}}=+\infty \end{cases}$$

**۴۲ .گزینه ۳ درست است.**

نقطه $A$ را به صورت $A(x,y)$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$AB=\sqrt{(x-۱)^۲+(y+۲)^۲}=\sqrt{۵}\Rightarrow (x^۲-۲x+۱)+(y^۲+۴y+۴)=۵$$

$$AC=\sqrt{(x+۳)^۲+(y-۴)^۲}=۱\Rightarrow (x^۲+۶x+۹)+(y^۲-۸y+۱۶)=۱$$

با کم کردن طرفین معادلات اخیر از هم، داریم:

$$(-۸x-۸)+(۱۲y-۱۲)=۴\Rightarrow ۱۲y=۸x+۲۴\Rightarrow ۳y=۲x+۶$$

حالا این خط در نقطه $x=۳$ بر منحنی $y=xf(x)$ مماس است.

با جایگذاری $x=۳$ در معادله خط، نقطه مماس به صورت $(۳,۴)$ است و این نقطه روی منحنی $y=xf(x)$ هم قرار دارد. پس:

$$۳f(۳)=۴\Rightarrow f(۳)=\frac{۴}{۳}$$

از طرفی شیب این خط مماس برابر با $\frac{۲}{۳}$ است، پس مشتق تابع $y=xf(x)$ در $x=۳$ باید برابر $\frac{۲}{۳}$ شود:

$$(xf(x))'=f(x)+xf'(x)\xrightarrow{x=۳}f(۳)+۳f'(۳)=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{f(۳)=\frac{۴}{۳}}\frac{۴}{۳}+۳f'(۳)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow f'(۳)=\frac{-۲}{۹}$$

نهایتاً برای محاسبه حد خواسته شده که به صورت $\frac{۰}{۰}$ است، از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۳f^۲(x)-f(x)-۴}{x-۳}\xrightarrow{f(۳)=\frac{۴}{۳}}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۶f(x)f'(x)-f'(x)}{۱}=۶f(۳)f'(۳)-f'(۳)\xrightarrow[f'(۳)=\frac{-۲}{}]{f(۳)=\frac{۴}{۳}}=۶(\frac{۴}{۳})(\frac{-۲}{۹})-(\frac{-۲}{۹})=\frac{-۱۶}{۹}+\frac{۲}{۹}=\frac{-۱۴}{۹}$$

۴۳. گزینه ۱ درست است.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازه } [۱,۷۲۹] = \frac{f(۷۲۹)-f(۱)}{۷۲۹-۱} = \frac{(۷۲۹+۲۷+۸۱)-(۱+۱+۱)}{۷۲۸} = \frac{۸۳۴}{۷۲۸}$$

$$f'(x) = ۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$x = ۶۴ \text{ آهنگ لحظه‌ای در } = f'(۶۴) = ۱ + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۵۹}{۴۸}$$

$$\text{نسبت خواسته‌شده} = \frac{\frac{۸۳۴}{۷۲۸}}{\frac{۵۹}{۴۸}} = \frac{۸۳۴\times۴۸}{۷۲۸\times۵۹} = \frac{۵۰۰۴}{۵۳۶۹}$$

۴۴ گزینه ۲ درست است.

$$x = ۵ \text{ آهنگ تغییر لحظه‌ای در } g'(f(۵))\times f'(۵) = g'(۱۶)\times f'(۵) = \frac{۱}{۲\sqrt{۱۶}}\times ۳ = \frac{۳}{۸}$$

$$\begin{cases} f'(x) = ۳ \\ g'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{(gof)(۸)-(gof)(۵)}{۸-۵} = \frac{g(f(۸))-g(f(۵))}{۳} = \frac{g(۲۵)-g(۱۶)}{۳} = \frac{۵-۴}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$\text{اختلاف دو آهنگ} = \frac{۳}{۸} - \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۲۴}$$

۴۵ گزینه ۳ درست است.

$$\underbrace{\lim_{x\to۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}}\times\underbrace{\lim_{x\to۴}\frac{۱}{x+۸}} = ۵$$

$$f'(۴)\times\frac{۱}{۱۲} = ۵ \to f'(۴) = ۶۰$$

$$\lim_{h\to۰}\frac{f(۴+۳h)-f(۴)+f(۴)-f(۴-۳h)}{h(h^۲+۳)}$$

$$= \lim_{h\to۰}\frac{۱}{h^۲+۳}\left(\lim\frac{f(۴+۳)-f(۴)}{\frac{۱}{۳}(۳h)} - \lim\frac{f(۴-۳h)-f(۴)}{-\frac{۱}{۳}(-۳h)}\right)$$

$$= \frac{۱}{۳}(۳f'(۴)+۳f'(۴)) = ۲f'(۴) = ۲(۶۰) = ۱۲۰$$

**۴۶. گزینه ۱ درست است.**

$$f'(x)=1-\frac{2(-1)}{3\sqrt[3]{2-x}}=1+\frac{2}{3\sqrt[3]{2-x}}\begin{cases}x\to 2^{+}: f'(x)\to -\infty\\ x\to 2^{-}: f'(x)\to +\infty\end{cases}$$

نمودار تابع مشتق $f'(x)$:

**۴۷ گزینه ۴ درست است.**

عبارت داخل قدرمطلق در همسایگی $x=2$ از نظر علامت، منفی است. بنابراین: $|3-x^2|=x^2-3$ و در نتیجه:

$$f(x)=x^3-3x\to f'(x)=3x^2-3\to f'(2)=9$$

از طرف دیگر آهنگ تغییر متوسط برابر است با:

$$\frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)}=\frac{2-(-18)}{5}=\frac{20}{5}=4$$

مجموع مقادیر متوسط و لحظه‌ای آهنگ تغییر $=9+4=13$

**۴۸. گزینه ۳ درست است.**

$$5x-y-7=0\to x=3 \text{ خط مماس در } \begin{cases}\boxed{f'(3)=5} \quad (1)\\ 5(3)-y-7=0\to y=8\to \boxed{f(3)=8} \quad (2)\end{cases}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 8}\left(\frac{g(x)-g(8)}{x-8}\right.}_{\text{مطابق تعریف مشتق}}\left.\times\frac{1}{x+7}\right)=\frac{37}{150}$$

$$g'(8)\times\frac{1}{15}=\frac{37}{150}\Rightarrow\boxed{g'(8)=\frac{37}{10}} \quad (3)$$

طبق (۲)

$$(gof)'(3)=g'(f(3))\times f'(3)=g'(8)\times f'(3)=\frac{37}{10}\times 5=18/5$$

طبق (۲) طبق (۱)

**۴۹. گزینه ۳ درست است.**

نقطه‌های گوشه‌ای تابع $x=۰$ , $x=۴$ هستند.

مشتق راست تابع در $x=۴$ و مشتق چپ آن در $x=۳$ را می‌یابیم.

$$f'_{+}(۴)=(x^{۲}-۴x)'=۲x-۴=۴$$

$$f'_{-}(۰)=(x^{۲}-۴x)'=۲x-۴=-۴$$

معادلهٔ نیم‌مماس‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y-۰=۴(x-۴)\rightarrow y=۴x-۱۶ \\ y=-۴x \end{cases}$$

نقطه تقاطع دو خط را می‌یابیم.

$$-۴x=۴x-۱۶\rightarrow ۸x=۱۶\rightarrow x=۲$$

عرض نقطه برابر است با:

$$y=-۴x=-۴(۲)=-۸$$

**۵۰ . گزینه ۳ درست است.**

از $f(۲x+۱)=\frac{x+\sqrt{x}}{۲}$ نتیجه می‌شود:

$$f^{-۱}(\frac{x+\sqrt{x}}{۲})=۲x+۱$$

با مشتق گرفتن از طرفین این رابطه داریم:

$$(\frac{x+\sqrt{x}}{۲})'(f^{-۱}(\frac{x+\sqrt{x}}{۲}))'=۲\Rightarrow(\frac{۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۲})(f^{-۱}(\frac{x+\sqrt{x}}{۲}))'=۲$$

می‌دانیم که آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f^{-۱}(x)$ در نقطه $x=۳$، همان $(f^{-۱})'(۳)$ است، پس لازم است که در تساوی بالا:

$$\frac{x+\sqrt{x}}{۲}=۳\Rightarrow x+\sqrt{x}=۶\Rightarrow x=۴$$

با جایگذاری $x=۴$ در رابطه آخر داریم:

$$(\frac{۱+\frac{۱}{۴}}{۲})(f^{-۱})'(۳)=۲\Rightarrow\frac{۵}{۸}(f^{-۱})'(۳)=۲\Rightarrow(f^{-۱})'(۳)=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲$$

**۵۱. گزینه ۳ درست است.**

ابتدا $g(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(x)=\begin{cases} (x+۲)^{۲}+b(x+۲)+c-۱ & x\geq ۱ \\ (۲x+b)+x & x<۱ \end{cases}$$

آن را ساده‌تر می‌کنیم:

$$g(x)=\begin{cases} x^{۲}+(۴+b)x+۳+۲b+c & x\geq ۱ \\ ۳x+b & x<۱ \end{cases}$$

برای این که تابع g، تابعی مشتق‌پذیر باشد، لازم است که در نقطه مرزی $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد. پس:

اولاً g در $x=۱$ پیوسته است:

$$g(۱)=\lim_{x\to ۱^{+}} g(x)=\lim_{x\to ۱^{-}} g(x)\Rightarrow ۱+(۴+b)+۳+۲b+c=۳+b\Rightarrow ۵+۲b+c=۰\Rightarrow \boxed{۲b+c=-۵}$$

ثانیاً مشتقات راست و چپ g در $x=۱$ برابرند:

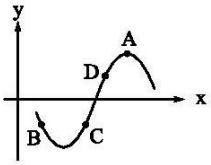
$$\begin{cases} g'_{+}(۱)=۲x+(۴+b)\xrightarrow{x=۱}=۲+۴+b=۶+b \\ g'_{-}(۱)=۳ \end{cases} \Rightarrow ۶+b=۳\Rightarrow \boxed{b=-۳}$$

با جایگذاری $b=-۳$ در رابطه $۲b+c=-۵$، $c=۱$ به‌دست می‌آید و لذا:

$$c-b=۱-(-۳)=۴$$

خیلی سبز!
آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

## تست و پاسخ ۱




اگر نمودار $f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، در کدام نقطه از نقاط مشخص‌شده، حاصل $\frac{f(x)}{f'(x)}$ عددی منفی است؟

۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

**پاسخ: گزینه ۳**

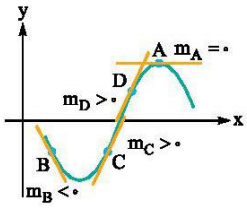
**مشاوره** این تست برگرفته از تمرین کتاب درسی‌تان است؛ پس هیچ‌وقت از کتاب درسی غافل نشوید.

**خودت حل کنی بهتره** علامت f همان علامت y نقطه و علامت $f'$ همان علامت شیب خط مماس بر f است.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** علامت f با توجه به بالای محور xها یا پایین محور xها بودن نقطه مشخص می‌شود.

علامت $f'$ با توجه به علامت شیب خط مماس در نقطهٔ مورد نظر به دست می‌آید.

**گام دوم:** در هر چهار نقطه، علامت f و $f'$ و در نتیجه علامت $\frac{f}{f'}$ را معلوم می‌کنیم:




| نقطه | علامت f | علامت $f'$ | علامت $\frac{f}{f'}$ |
|---|---|---|---|
| A | + | صفر | تعریف‌نشده! |
| B | − | − | + |
| C | − | + | − |
| D | + | + | + |

پس $\frac{f}{f'}$ فقط در نقطهٔ C، عددی منفی می‌شود.

## تست و پاسخ ۲

اگر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}=\sqrt{x+2}$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x\sqrt{x+2}}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $-1$
۳) $\sqrt{2}$
۴) $-\sqrt{2}$

**پاسخ: گزینه ۲**

**خودت حل کنی بهتره** در صورت حد اول از منفی فاکتور بگیرید و در حد دوم در عبارت $\sqrt{x+2}$ همان ابتدا $x=0$ را قرار دهید.

**درس‌نامه** **تعریف مشتق و نوشتن معادلهٔ خط مماس**

- مشتق تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر با شیب خط مماس بر تابع f در نقطهٔ $x=a$ است و با نماد $f'(a)$ نشان داده می‌شود و مقدار آن را به کمک یکی از حدهای زیر می‌توانیم به دست آوریم:

۱) $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

۲) $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** عبارت $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}$ همان $-f'(x)$ است، پس:

$$-f'(x)=\sqrt{x+2}\Rightarrow f'(x)=-\sqrt{x+2}$$

**گام دوم**: حد خواسته‌شده را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x\sqrt{x+2}}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}_{f'(0)}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}}=f'(0)\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

**گام سوم**: مقدار $f'(0)$ را با استفاده از $f'(x)=-\sqrt{x+2}$ حساب می‌کنیم:

$$f'(0)=-\sqrt{2}$$

پس ادامهٔ گام دوم به صورت مقابل می‌شود:

$$f'(0)\times\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=-1$$

## تست و پاسخ ۳

اگر $f(x)=\frac{1+\sqrt{2x}}{3+4x}$، آن‌گاه حاصل $\lim_{x\to 0/5}\frac{f(x)-f(0/5)}{x-0/5}$ کدام است؟ $f'(0/5)$

۱) $-0/12$ ۲) $0/12$ ۳) $0/52$ ۴) $-0/52$

**پاسخ: گزینه ۱**

**مشاوره** خیلی وقت‌ها از شما $f'(a)$ را می‌خواهند، ولی آن را به صورت تعریف حدی‌اش می‌دهند که مثلاً سؤال خفن‌تر باشه!

**خودت حل کنی بهتره** برای به دست آوردن $f'(0/5)$ از قواعد مشتق‌گیری که در درس‌نامهٔ ۳ اشاره کردیم، استفاده کنید.

**درس‌نامه** ۱. تعریف مشتق و نوشتن معادلهٔ خط مماس

- مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر با شیب خط مماس بر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ است و با نماد $f'(a)$ نشان داده می‌شود و مقدار آن را به کمک یکی از حدهای زیر می‌توانیم به دست آوریم:

۱) $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

۲) $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

**درس‌نامه** ۲. مشتق توابع مهم

| مثال | مشتق | عبارت |
|---|---|---|
| $5\xrightarrow{'}0$ | صفر | عدد |
| $x^5\xrightarrow{'}5x^4$ | $nx^{n-1}$ | $x^n$ |
| $(x^3-x^2)^6\xrightarrow{'}6(x^3-x^2)^5\times(3x^2-2x)$ | $n.\square^{n-1}.\square'$ | $\square^n$ |
| $\sqrt{3x+5}\xrightarrow{'}\frac{3}{2\sqrt{3x+5}}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\sqrt{x}$ |
| | $\frac{\square'}{2\sqrt{\square}}$ | $\sqrt{\square}$ |

| مثال | مشتق | عبارت |
|---|---|---|
| $\sqrt[3]{x^2+x} \xrightarrow{\prime} \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x)^2}}$ | $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ | $\sqrt[3]{x}$ |
| | $\frac{\square'}{3\sqrt[3]{\square^2}}$ | $\sqrt[3]{\square}$ |
| $\sin 4x \xrightarrow{\prime} 4\cos 4x$ | $\cos x$ | $\sin x$ |
| | $\square'.\cos\square$ | $\sin\square$ |
| $\cos(x^2) \xrightarrow{\prime} -2x.\sin(x^2)$ | $-\sin x$ | $\cos x$ |
| | $-\square'.\sin\square$ | $\cos\square$ |
| $\tan 3x \xrightarrow{\prime} 3(1+\tan^2 3x)$ | $1+\tan^2 x$ | $\tan x$ |
| | $\square'(1+\tan^2\square)$ | $\tan\square$ |
| $\cot(2x+1) \xrightarrow{\prime} -2(1+\cot^2(2x+1))$ | $-(1+\cot^2 x)$ | $\cot x$ |
| | $-\square'(1+\cot^2\square)$ | $\cot\square$ |
| $\frac{2x-3}{5x+1} \xrightarrow{\prime} \frac{(2)(1)-(-3)(5)}{(5x+1)^2} = \frac{17}{(5x+1)^2}$ | $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ | $\frac{ax+b}{cx+d}$ |
| $\frac{2x^3-3}{5x^3+1} \xrightarrow{\prime} \frac{17}{(5x^3+1)^2}\times 3x^2$ | $\frac{ad-bc}{(c\square+d)^2}\times\square'$ | $\frac{a\square+b}{c\square+d}$ |

درس‌نامه ۳. قضایای مشتق‌گیری

| | رابطه | مثال |
|---|---|---|
| ضریب عددی | $a.\square \xrightarrow{\prime} a.\square'$ | $5x^3 \xrightarrow{\prime} 5(3x^2)=15x^2$ |
| جمع و تفریق | $f\pm g \xrightarrow{\prime} f'\pm g'$ | $4x^7-\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\prime} 28x^6-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ |
| ضرب | $f.g \xrightarrow{\prime} f'.g+f.g'$ | $x^2(\sqrt{x}+1) \xrightarrow{\prime} 2x(\sqrt{x}+1)+x^2(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ |
| تقسیم | $\frac{f}{g} \xrightarrow{\prime} \frac{f'.g-f.g'}{g^2}$ | $\frac{x+4}{2x^3-1} \xrightarrow{\prime} \frac{1(2x^3-1)-6x^2(x+4)}{(2x^3-1)^2}$ |
| ترکیب | $f(\square) \xrightarrow{\prime} \square'.f'(\square)$ | $f(x^2+2x-3) \xrightarrow{\prime} (2x+2).f'(x^2+2x-3)$ |

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** حد $\lim\limits_{x\to ۰/۵}\frac{f(x)-f(۰/۵)}{x-۰/۵}$ همان $f'(۰/۵)$ است.

**گام دوم:** مشتق تابع $f(x)=\frac{۱+\sqrt{۲x}}{۳+۴x}$ را با استفاده از مشتق تقسیم و هم‌چنین رابطهٔ $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$ حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{(۱+\sqrt{۲x})'(۳+۴x)-(۱+\sqrt{۲x})(۳+۴x)'}{(۳+۴x)^۲}=\frac{(۰+\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}})(۳+۴x)-(۱+\sqrt{۲x})(۰+۴)}{(۳+۴x)^۲}$$

**گام سوم:** $x=۰/۵$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f'(۰/۵)=\frac{(\frac{۲}{۲})(۳+۲)-(۱+۱)(۴)}{(۳+۲)^۲}=\frac{۵-۸}{۲۵}=\frac{-۳}{۲۵}=\frac{-۳\times ۴}{۲۵\times ۴}=-۰/۱۲$$

## تست و پاسخ ۴

اگر $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲-x}$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$ کدام است؟ $f'(۱)$

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) صفر

**پاسخ: گزینه ۱**

**مشاوره** مشتق عبارات رادیکالی در ریشه‌های داخل رادیکال، می‌تواند بی‌نهایت باشد.

**درس‌نامه** تعریف مشتق و نوشتن معادلهٔ خط مماس

- مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر با شیب خط مماس بر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ است و با نماد $f'(a)$ نشان داده می‌شود و مقدار آن را به کمک یکی از حدهای زیر می‌توانیم به دست آوریم:

۱) $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ۲) $f'(a)=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

**نکته** اگر $f(x)=\sqrt[۲]{(x-a)g(x)}$ و $g(a)\neq ۰$، آن‌گاه $f'(a)$ یا $\underbrace{+\infty}_{g(a)>۰\text{ وقتی}}$ است یا $\underbrace{-\infty}_{g(a)<۰\text{ وقتی}}$.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** حد $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$ همان $f'(۱)$ است.

**گام دوم:** مشتق $f(x)$ را به کمک قانون $(\sqrt[۳]{u})'=\frac{u'}{۳\sqrt[۳]{u^۲}}$ حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt[۳]{x^۲-x}\Rightarrow f'(x)=\frac{(x^۲-x)'}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-x)^۲}}=\frac{۲x-۱}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-x)^۲}}$$

**گام سوم:** با قراردادن $x=۱$ مخرج $f'(x)$ صفر می‌شود؛ پس باید $۱^+$ و $۱^-$ را چک کنیم. به ازای هر دوی آن‌ها مخرج $۰^+$ می‌شود (چون توان زوج دارد.)، پس:

$$f'(۱)=\frac{۲-۱}{۰^+}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

## تست و پاسخ ۵

اگر $f(x)=۲x+\frac{a}{x}$ به طوری که $f(۲)+f'(۲)=۷$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $-۴$ ۴) $۴$

**پاسخ: گزینه ۴**

**خودت حل کنی بهتره** برای مشتق‌گیری از $\frac{a}{x}$، آن را به شکل $a.x^{-1}$ بنویسید و از قانون $(x^n)' = nx^{n-1}$ استفاده کنید.

**نکته** برای مشتق‌گرفتن از عبارات به فرم $\frac{a}{x}$ یا $\sqrt[m]{x^n}$، آن‌ها را به شکل $ax^{-1}$ و $x^{\frac{n}{m}}$ می‌نویسیم و بعد از قاعدهٔ $(x^n)' = nx^{n-1}$ استفاده می‌کنیم.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** مقدار $f(2)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = 2x + \frac{a}{x} \Rightarrow f(2) = 4 + \frac{a}{2}$$

**گام دوم:** $f'$ را حساب می‌کنیم و با جای‌گذاری $x = 2$، مقدار $f'(2)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = 2x + ax^{-1} \Rightarrow f'(x) = 2 + a(-1x^{-2}) = 2 - \frac{a}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 2 - \frac{a}{4}$$

**گام سوم:** معادلهٔ داده‌شده در صورت سؤال را حل می‌کنیم:

$$f(2) + f'(2) = 7 \Rightarrow (4 + \frac{a}{2}) + (2 - \frac{a}{4}) = 7 \Rightarrow \frac{a}{4} = 1 \Rightarrow a = 4$$

## تست و پاسخ ۶

**اگر $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$، آن‌گاه مشتق تابع $y = \frac{x-1}{f(x) + \sqrt{f(x)} + 1}$ در $x = 8$ کدام است؟**

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{24}$ ۴) $\frac{2}{3}$

**پاسخ: گزینه ۱**

**مشاوره** **اگر قیافهٔ عبارتی که قرار است از آن مشتق بگیرید ترسناک بود، به احتمال خیلی زیاد باید قبل از مشتق‌گیری آن را ساده کنید یا این‌که باید از مشتق عامل صفرکننده استفاده کنید.**

**خودت حل کنی بهتره** $f(x)$ را در $y$ جای‌گذاری کنید و دنبال تجزیه با اتحاد چاق و لاغر باشید.

**نکته** فرم کلی اتحاد چاق و لاغر به صورت روبه‌رو است:

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** در ضابطهٔ $y$، جای $f(x)$ها، $\sqrt[3]{x^2}$ را قرار می‌دهیم:

$$y = \frac{x-1}{f(x) + \sqrt{f(x)} + 1} \xrightarrow{f(x) = \sqrt[3]{x^2}} y = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}$$

**گام دوم:** صورت کسر را با اتحاد چاق و لاغر $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ تجزیه می‌کنیم:

$$y = \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)\cancel{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}}{\cancel{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}} = \sqrt[3]{x} - 1$$

**گام سوم:** حالا از $y$ مشتق می‌گیریم:

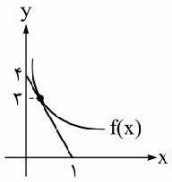
$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 0$$

**گام چهارم:** $x - 8$ را در $y'$ قرار می‌دهیم:

$$y'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{12}$$

## تست و پاسخ ۷

**بخشی از نمودار تابع $f(x)$ رسم شده است. مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{x - \sqrt{x}}$ در $x - \frac{1}{4}$ کدام است؟**



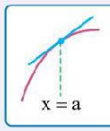

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۲

**پاسخ: گزینه ۱**

**مشاوره** وقتی خطی در $x=a$ بر تابع $f(x)$ مماس می‌شود، $f(a)$ و $f'(a)$ به کمک معادلهٔ خط مماس قابل محاسبه‌اند.

**خودت حل کنی بهتره** معادلهٔ خط را بنویسید و بعد $y$ را ۳ قرار دهید تا طول نقطه‌ای که خط بر منحنی مماس شده، به دست آید.

**نکته** اگر خط $g(x)=mx+h$ در نقطه‌ای به طول $a$ بر منحنی $f(x)$ مماس باشد، آن‌گاه دو تساوی مهم داریم:




| | | |
|---|---|---|
| ۱ | خط و منحنی در نقطهٔ $x=a$ مشترک‌اند. | $f(a)=g(a)$ |
| ۲ | شیب خط با مشتق $f$ در نقطهٔ تماس برابر است. | $f'(a)=m$ |

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** از خط مماس رسم‌شده، عرض از مبدأ $(q-۴)$ و طول از مبدأ $(p-۱)$ را داریم. معادله‌اش را می‌نویسیم:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱ \Rightarrow \frac{x}{۱}+\frac{y}{۴}=۱ \xrightarrow{\times ۴} y=-۴x+۴$$

**گام دوم:** طول نقطه‌ای روی خط مماس که عرضش ۳ است را پیدا می‌کنیم:

$$۳=-۴x+۴ \Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

پس خط مماس در $x=\frac{۱}{۴}$، شیبش $-۴$ است، یعنی:

$$f'(\frac{۱}{۴})=-۴$$

**گام سوم:** مشتق تابع $y=\frac{f(x)}{x-\sqrt{x}}$ را با استفاده از قاعدهٔ مشتق تقسیم حساب می‌کنیم:

$$y'=\frac{f'(x)(x-\sqrt{x})-f(x)(۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x}})}{(x-\sqrt{x})^۲}$$

**گام چهارم:** $x=\frac{۱}{۴}$ را در تساوی بالا قرار می‌دهیم:

$$y'(\frac{۱}{۴})=\frac{\overbrace{f'(\frac{۱}{۴})}^{-۴}(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲})-f(\frac{۱}{۴})\overbrace{(۱-\frac{۱}{۲\times\frac{۱}{۲}})}^{۰}}{(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{-۴(-\frac{۱}{۴})-۰}{\frac{۱}{۱۶}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}}=۱۶$$

## تست و پاسخ ۸

**یکی از خط‌های مماس بر نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^۲$ با نیمساز ربع دوم و چهارم موازی است. این خط مماس از کدام نقطه می‌گذرد؟**

۱) $(\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۴})$ ۲) $(-\frac{۱}{۴},\frac{۵}{۴})$ ۳) $(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})$ ۴) $(-\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۲})$

**پاسخ: گزینه ۳**

**خودت حل کنی بهتره** وقتی خط مماس با $y=-x$ موازی است، یعنی $f'(x)$ برابر $-۱$ است.

**درس نامه** معادلهٔ خط مماس بر $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$

| نقطه | شیب خط مماس | معادلهٔ خط مماس |
|---|---|---|
| $(a,f(a))$ | $f'(a)$ | $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ |

مثال: معادلهٔ خط مماس بر منحنی $f(x)=x^۳-x^۲$ در $x=۲$:

- $f(۲)=۸-۴=۴ \xrightarrow{\text{نقطه}} (۲,۴)$
- $f'(x)=۳x^۲-۲x \Rightarrow f'(۲)=۱۲-۴=۸ \Rightarrow m_{\text{مماس}}=۸$
- معادلهٔ خط مماس: $y-y_۰=m(x-x_۰) \Rightarrow y-۴=۸(x-۲) \Rightarrow y=۸x-۱۲$

**نکته** اگر دو خط با هم موازی باشند، شیب‌هایشان یکسان است.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** مشتق تابع f را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=(x-1)^2 \xrightarrow{(u^2)'=2uu'} f'(x)=2(x-1)\underbrace{(x-1)'}_{1}=2x-2$$

**گام دوم:** معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم $y=-x$ است که شیبش $-1$ است.

خطی که بخواهد با نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم موازی باشد، باید شیبش $-1$ باشد؛ پس $f'$ را باید مساوی $-1$ قرار دهیم:

$$f'(x)=-1 \Rightarrow 2x-2=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

**گام سوم:** مختصات نقطه‌ای به طول $\frac{1}{2}$ روی f را حساب می‌کنیم:

$$f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2}-1)^2=\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{نقطه}} (\frac{1}{2},\frac{1}{4})$$

**گام چهارم:** معادلهٔ خط با شیب $-1$ و گذرنده از نقطهٔ $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ را می‌نویسیم:

$$y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-\frac{1}{4}=-1(x-\frac{1}{2}) \Rightarrow y=-x+\frac{3}{4}$$

**گام پنجم:** در بین گزینه‌ها فقط نقطهٔ $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ روی خط فوق قرار دارد.

## تست و پاسخ ۹

**تابع $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$ مفروض است. عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $f^{-1}(x)$ در نقطهٔ $x=-3$ واقع بر $f^{-1}$ کدام است؟**

۱) $1/25$ ۲) $-1/25$ ۳) $1/5$ ۴) $-1/5$

**پاسخ: گزینه ۲**

**خودت حل کنی بهتره** ضابطهٔ $f^{-1}$ را به دست آورید و بعد از آن مشتق بگیرید.

**درس نامه** مشتق تابع وارون

فرض کنید نقطهٔ $(a,b)$ روی تابع f است (پس نقطهٔ $(b,a)$ روی $f^{-1}$ است). برای محاسبهٔ مشتق $f^{-1}$ در $x=b$ دوتا کار می‌توانیم انجام دهیم:

| | |
|---|---|
| ۱ | وارون f را حساب کنیم. بعد از آن مشتق بگیریم و به جای xهایش b قرار دهیم. |
| ۲ | مشتق f در $x=a$ و مشتق $f^{-1}$ در $x=b$ که نقطهٔ نظیرش است، وارون هم هستند، یعنی: $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$ |

**نکات**

۱) وارون تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

۲) مشتق تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ است.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** وارون تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$ را طبق نکتهٔ ۱ حساب می‌کنیم:

$$f^{-1}(x)=\frac{-3x-1}{x-1}$$

**گام دوم:** مختصات نقطه‌ای به طول $x=-3$ روی $f^{-1}(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-1}(-3)=\frac{9-1}{-3-1}=-2 \xrightarrow{\text{نقطه}} A(-3,-2)$$

**گام سوم:** مشتق $f^{-1}$ را در $x=-3$ حساب می‌کنیم:

$$f^{-1}(x)=\frac{-3x-1}{x-1}\xrightarrow[\text{(نکتهٔ ۲)}]{\text{مشتق}}(f^{-1})'(x)=\frac{(-3)(-1)-(-1)(1)}{(x-1)^2}=\frac{4}{(x-1)^2}\xrightarrow{x=-3}(f^{-1})'(-3)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

پس شیب خط مماس $m=\frac{1}{4}$ است.

**گام چهارم:** معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $A(-3,-2)$ را می‌نویسیم:

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y+2=\frac{1}{4}(x+3)\Rightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$$

$-1/25=$ عرض از مبدأ

## تست و پاسخ ۱۰

**اگر $f(x)=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}x+1}{x+1}}$ و $g(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{f'(0)}{f(0)}+\frac{g'(0)}{g(0)}$ کدام است؟**

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $2$ ۴) $\sqrt{2}$

**پاسخ: گزینه ۲**

**خودت حل کنی بهتره** در عبارت $\frac{f'(0)}{f(0)}+\frac{g'(0)}{g(0)}$ مخرج مشترک بگیرید، صورتش ساده می‌شود.

**درس‌نامه** قواعد مشتق‌گیری

(در جدول زیر، منظور از $(')$ روی فلش، همان مشتق است.)

| | رابطه | مثال |
|---|---|---|
| ضریب عددی | $a.\bigcirc \xrightarrow{'} a.\bigcirc'$ | $5x^3 \xrightarrow{'} 5(3x^2)=15x^3$ |
| جمع و تفریق | $f\pm g \xrightarrow{'} f'\pm g'$ | $4x^7-\sqrt[3]{x} \xrightarrow{'} 28x^6-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ |
| ضرب | $f.g \xrightarrow{'} f'.g+f.g'$ | $x^2(\sqrt{x}+1) \xrightarrow{'} 2x(\sqrt{x}+1)+x^2(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ |
| تقسیم | $\frac{f}{g} \xrightarrow{'} \frac{f'.g-f.g'}{g^2}$ | $\frac{x+4}{2x^3-1} \xrightarrow{'} \frac{1(2x^3-1)-6x^2(x+4)}{(2x^3-1)^2}$ |
| ترکیب | $f(\bigcirc) \xrightarrow{'} \bigcirc'.f'(\bigcirc)$ | $f(x^2+2x-3) \xrightarrow{'} (2x+2).f'(x^2+2x-3)$ |

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** در عبارت خواسته‌شده، با مخرج‌مشترک‌گیری، جای صورت می‌توانیم عبارت ساده‌تری قرار دهیم:

$$\frac{f'(0)}{f(0)}+\frac{g'(0)}{g(0)}=\frac{\overbrace{f'(0)g(0)+g'(0)f(0)}^{\text{همان مشتق ضرب است.}}}{f(0)g(0)}=\frac{(f.g)'(0)}{f(0)g(0)}$$

**گام دوم:** $f.g$ را حساب می‌کنیم و بعد مشتق می‌گیریم:

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=\sqrt{\frac{\frac{x}{2}+1}{x+1}}\times\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{\frac{\cancel{x+2}}{2(x+1)}}\times\frac{x+1}{\cancel{\sqrt{x+2}}}=\frac{x+1}{\sqrt{2(x+1)}}=\frac{\sqrt{x+1}\times\cancel{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{2}\times\cancel{\sqrt{x+1}}}$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

**گام سوم**: مشتق $f.g(x)$ را می‌گیریم:

$$(f.g)(x)=\sqrt{\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}} \Rightarrow (f.g)'(x)=\frac{\frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}}}$$

حالا $x=۰$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$(f.g)'(۰)=\frac{\frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{\frac{۱}{۲}}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

**گام چهارم**: مقادیر $f(۰)$ و $g(۰)$ را حساب می‌کنیم:

$$g(x)=\frac{x+۱}{\sqrt{x+۲}} \Rightarrow g(۰)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{\frac{x}{۲}+۱}{x+۱}} \Rightarrow f(۰)=۱$$

**گام پنجم**: سه مقدار به‌دست‌آمده را در عبارت انتهایی گام اول قرار می‌دهیم:

$$\frac{(f.g)'(۰)}{f(۰)g(۰)}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}{۱\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

## تست و پاسخ ۱۱

**تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۲ & ; \quad x\geq\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲}x+b & ; \quad x<\frac{۱}{۲}\end{cases}$ در $x=\frac{۱}{۲}$ مشتق‌پذیر است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۴− ۳) ۳ ۴) ۳−

**پاسخ: گزینه ۲**

**مشاوره** سؤال بررسی مشتق‌پذیری توابع دوضابطه‌ای به فرم $\begin{cases} g(x) & x\geq x_۰ \\ h(x) & x<x_۰\end{cases}$ از سؤالات بسیار پرتکرار کنکور است. دو تا شرط را باید در آن‌ها چک کنید.

**خودت حل کنی بهتره** شرط پیوستگی و برابری مشتق چپ و راست در $x=\frac{۱}{۲}$ را بررسی کنید.

**درس‌نامه •• مشتق‌پذیری در مرز توابع چندضابطه‌ای**

اگر تابع $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq a \\ h(x) & x<a\end{cases}$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، باید دو شرط زیر را داشته باشد:

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | در $x=a$ پیوسته باشد. | $g(a)=h(a)$ |
| ۲ | مشتق راست و چپ در $x=a$ برابر باشد. | $g'(a)=h'(a)$ |

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} ax+۴ & x\geq ۲ \\ x^۳+b & x<۲\end{cases}$ در $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد، مقادیر $a$ و $b$ را به دست آورید.

۱) باید $f$ در $x-۲$ پیوسته باشد:

$$\underbrace{۲a+۴}_{\text{حد راست و مقدار}}=\underbrace{۲^۳+b}_{\text{حد چپ}} \Rightarrow ۲a-b=۴$$

۲) باید مشتق راست و چپ در $x=۲$ برابر باشند:

$$\underbrace{a}_{\text{مشتق راست}}=\underbrace{۳x^۲}_{\text{مشتق چپ}} \xrightarrow{x=۲} a=۱۲$$

پس $a=۱۲$ و $b=۲۰$ است.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** باید f در $x=\frac{1}{2}$ پیوسته باشد؛ پس:

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \text{ مقدار و حد راست در } ax^2 \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} \frac{1}{4}a \\ x=\frac{1}{2} \text{ حد چپ در } \frac{1}{2}x+b \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} \frac{1}{4}+b \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{4}a=\frac{1}{4}+b \xrightarrow{\times 4} a=1+4b$$

**گام دوم:** باید مشتق‌های چپ و راست f در $x-\frac{1}{2}$ برابر باشند:

$$\left.\begin{array}{l} \text{مشتق راست}: (ax^2)'=2ax \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} a \\ \text{مشتق چپ}: (\frac{1}{2}x+b)'=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

**گام سوم:** با جای‌گذاری $a=\frac{1}{2}$ در $a=1+4b$، داریم:

$$\frac{1}{2}=1+4b \Rightarrow 4b=\frac{-1}{2} \Rightarrow b=\frac{-1}{8}$$

**گام چهارم:**

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{8}}=-4$$

## تست و پاسخ ۱۲

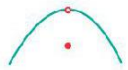
**تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{|2x|+x+a}$ که $a>0$، در نقطهٔ $x=b$ مشتق ندارد. اگر $f'_-(b)\times f'_+(b)=-3$ باشد، مقدار a کدام است؟**

۱) ۴ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{4}$

**پاسخ: گزینه ۴**

**خودت حل کنی بهتره** b همان ریشهٔ داخل قدرمطلق است.

**درس‌نامه** ۱. نقاط مشتق‌ناپذیری

| اسم نقطه | توضیح | کجا می‌تواند رخ دهد؟ | مثال نموداری |
|---|---|---|---|
| **نقاط ناپیوستگی** | هر نقطه‌ای که تابع در آن ناپیوسته باشد، قطعاً مشتق‌ناپذیر هم است. | ریشه‌های مخرج<br>نقاط صحیح داخل براکت<br>مرز توابع چندضابطه‌ای |  |
| **گوشه** | اولاً تابع در آن پیوسته است.<br>ثانیاً «مشتق‌های چپ و راست، دو عدد نابرابرند.» یا «مشتق یک طرف، عدد و طرف دیگری بی‌نهایت است.» | ریشه‌های سادهٔ قدرمطلق<br>مرز توابع چندضابطه‌ای | |
| **عطف قائم** | مشتق‌های دو طرف، بی‌نهایت‌های هم‌علامت هستند. | عامل صفرکنندهٔ داخل رادیکال | |
| **بازگشتی** | مشتق‌های دو طرف بی‌نهایت‌های ناهم‌علامت هستند. | | |

**درس‌نامه** ۲. مشتق توابع قدرمطلقی و براکتی

| | |
|---|---|
| **قدرمطلقی** | عبارت داخل قدرمطلق را با توجه به علامتش از قدرمطلق خارج می‌کنیم، بعد مشتق می‌گیریم. |
| | **مثال:** اگر $f(x)=\|x^2-9\|$ باشد، حاصل $f'_-(3)$؟ <br> ضابطهٔ f بدون قدرمطلق در $3^-$: $-x^2+9 \xrightarrow{'} -2x \xrightarrow{x=3} -6$ |
| **براکتی** | مقدار عددی عبارت براکتی را به جایش قرار می‌دهیم و بعد مشتق می‌گیریم. البته در براکتی‌ها حواستان باید به پیوستگی باشد. |
| | **مثال ۱:** اگر $f(x)=[2x]x^2$ باشد، حاصل $f'_+(3)$؟ <br> ضابطهٔ f بدون براکت در $3^+$: $6x^2 \xrightarrow{'} 12x \xrightarrow{x=3} 36$ |
| | **مثال ۲:** اگر $f(x)=[2x]x^2$ باشد، حاصل $f'_-(3)$؟ چون f در $x-3$ پیوستگی چپ ندارد، پس مشتق چپ ندارد. |

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** ریشهٔ داخل قدرمطلق همان نقطه‌ای است که f در آن مشتق‌پذیر نیست: $2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow b=0$

**تذکر** با توجه به $a>0$، عبارت زیر رادیکال یعنی $|2x|+x+a$ همواره مثبت است و عبارت زیر رادیکال ریشه ندارد، پس تنها نقطهٔ مشتق‌ناپذیری همان ریشهٔ قدرمطلق است.

**گام دوم:** ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{|2x|+x+a}$ را در $0^+$ و $0^-$ بدون قدرمطلق می‌نویسیم و از آن مشتق می‌گیریم:

$$0^+: f(x)=\sqrt{2x+x+a}=\sqrt{3x+a} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{3}{2\sqrt{3x+a}} \xrightarrow{x=0} f'_+(0)=\frac{3}{2\sqrt{a}}$$

$$0^-: f(x)=\sqrt{-2x+x+a}=\sqrt{-x+a} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{-1}{2\sqrt{-x+a}} \xrightarrow{x=0} f'_-(0)=\frac{-1}{2\sqrt{a}}$$

**گام سوم:**

$$f'_-(0)\times f'_+(0)=-3 \Rightarrow \frac{-1}{2\sqrt{a}}\times\frac{3}{2\sqrt{a}}=-3 \Rightarrow \frac{-3}{4a}=-3 \Rightarrow 4a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

## تست و پاسخ ۱۳

**اگر $f(x)=\frac{(-1)^{[x]}|x^2-9|}{x}$ باشد، آن‌گاه $f'_+(3)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)**

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) $-2$ ۴) ناموجود

**پاسخ: گزینه ۳**

**مشاوره** **در سؤالات مشتق، وقتی گزینهٔ «موجود نیست» می‌بینید، حواستان به پیوستگی باشد.**

**خودت حل کنی بهتره** ضابطهٔ f را در $3^+$ بدون براکت و بدون قدرمطلق بنویسید و بعد از آن مشتق بگیرید.

**نکته** $(\frac{k}{x})'=\frac{-k}{x^2}$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** با توجه به وجود ۴ (ناموجود) باید پیوستگی راست $f(x)=\frac{(-1)^{[x]}|x^2-9|}{x}$ در $x=3$ را بررسی کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{حد راست: } \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\frac{(-1)^3\times 0}{3}=0 \\ \text{مقدار: } f(3)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{مقدار} = \text{حد راست} \Rightarrow \text{پیوستگی راست دارد}$$

پس جواب ۴ نیست.

**گام دوم:** ضابطهٔ f را بدون براکت و بدون قدرمطلق در $۳^+$ می‌نویسیم:

$$x = ۳^+ : [x] = [۳^+] = ۳$$

$$x = ۳^+ : |\underbrace{x^۲ - ۹}_{\text{مثبت}}| = x^۲ - ۹$$

پس جای $[x]$ عدد ۳ و جای $|x^۲ - ۹|$ عبارت $x^۲ - ۹$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{(-۱)^{[x]}\,|x^۲ - ۹|}{x} \xrightarrow{\text{ساده‌سازی}} f(x) = \frac{(-۱)^۳\,(x^۲ - ۹)}{x} = \frac{-x^۲ + ۹}{x}$$

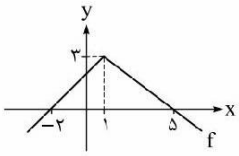
**گام سوم:** به کمک قاعدهٔ مشتق تقسیم، $f'(x)$ را حساب می‌کنیم و $x = ۳$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$f(x) = -x + \frac{۹}{x} \Rightarrow f'(x) = -۱ - \frac{۹}{x^۲}$$

$$\xrightarrow{x=۳} f'_+(۳) = -۱ - \frac{۹}{۹} = -۲$$

## تست و پاسخ ۱۴

**نمودار تابع $f(x)$ رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{h \to ۰^-} \frac{f(۱-۲h) - f(۱+h)}{۲h^۲ - h}$ کدام است؟**



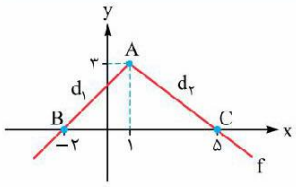

۱) $-۰/۷۵$ ۲) $-۰/۵$

۳) $۰/۷۵$ ۴) $۰/۵$

**پاسخ: گزینه ۲**

**خودت حل کنی بهتره** از هوپیتال استفاده کنید و بعدش به جای hهای صورت، $۰^-$ قرار دهید تا $۱^+$ و $۱^-$ بودنشان معلوم شود.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** با توجه به نمودار f، مشتق راست و چپ f در $x = ۱$ برابر نیستند (مشتق چپ و راست به ترتیب برابر با شیب خط سمت چپی و شیب خط سمت راستی می‌شوند).




هر دو مقدار را حساب می‌کنیم:

$$m_{d_۱} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{۳ - ۰}{۱ - (-۲)} = ۱ \xrightarrow{\text{مشتق چپ}} f'_-(۱) = ۱$$

$$m_{d_۲} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{۳ - ۰}{۱ - ۵} = \frac{-۳}{۴} \xrightarrow{\text{مشتق راست}} f'_+(۱) = \frac{-۳}{۴}$$

**گام دوم:** می‌دانیم مشتق $f(\bigcirc)$ برابر با $f'(\bigcirc)\cdot\bigcirc'$ است. به کمک این رابطه و قاعدهٔ هوپیتال، حاصل حد داده‌شده (که $\frac{۰}{۰}$ است.) را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{h \to ۰^-} \frac{f(۱-۲h) - f(۱+h)}{۲h^۲ - h} \overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{h \to ۰^-} \frac{-۲f'(۱-۲h) - ۱f'(۱+h)}{۴h - ۱}$$

جای hها داخل پرانتز در صورت باید $۰^-$ قرار دهیم تا جنس ۱ها معلوم شود:

$$\lim_{h \to ۰^-} \frac{-۲f'(۱-۲h) - ۱f'(۱+h)}{۴h - ۱} = \frac{-۲f'(۱-۰^-) - f'(۱+۰^-)}{۰ - ۱} = \frac{-۲f'(۱^+) - f'(۱^-)}{-۱} = ۲\underbrace{f'(۱^+)}_{\frac{-۳}{۴}} + \underbrace{f'(۱^-)}_{۱} = -۱/۵ + ۱ = -۰/۵$$

## تست و پاسخ ۱۵

**تابع $f(x) = |x^۳ + ۸| - x^۲ + k$ مفروض است. اگر عرض از مبدأ نیم‌مماس چپ در نقطهٔ گوشهٔ آن برابر با $-۶$ باشد، k کدام است؟**

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۰

**پاسخ: گزینه ۲**

**خودت حل کنی بهتره** ریشهٔ داخل قدرمطلق، همان طول نقطهٔ گوشه است.

**پاسخ تشریحی** **گام اول**: ریشهٔ داخل قدرمطلق، همان نقطهٔ گوشهٔ f است: $x^3+8=0 \Rightarrow x^3=-8 \Rightarrow x=-2$

**گام دوم**: مختصات نقطهٔ گوشه را پیدا می‌کنیم: $f(-2)=|-8+8|-4+k=k-4 \xrightarrow{\text{نقطهٔ گوشه}} (-2,k-4)$

**گام سوم**: مشتق چپ f در $x=-2$، همان شیب نیم‌مماس چپ است.

ضابطهٔ f در $(-2)^-$ را بدون قدرمطلق می‌نویسیم و بعد مشتق می‌گیریم:

$$x=(-2)^-: f(x)=|\underbrace{x^3+8}_{\text{منفی}}|-x^2+k=-x^3-8-x^2+k \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)=-3x^2-2x$$

$$\xrightarrow{x=-2} f'_-(-2)=-12+4=-8 \Rightarrow m_{\text{نیم‌مماس چپ}}=-8$$

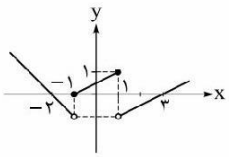
**گام چهارم**: با داشتن شیب و نقطه، معادلهٔ نیم‌مماس چپ را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} A(-2,k-4) \\ m=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow y-(k-4)=-8(x+2) \Rightarrow y=-8x+\underbrace{k-20}_{\text{عرض از مبدأ}}$$

**گام پنجم**: طبق صورت سؤال، عرض از مبدأ باید $-6$ باشد؛ پس: $k-20=-6 \Rightarrow k=14$

## تست و پاسخ ۱۶

**نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. تابع $g(x)=f(x)+|f(x)|$ در چند نقطه از بازهٔ $(-2,3)$ مشتق‌پذیر نیست؟**




۱) ۴ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۱

**پاسخ: گزینه ۲**

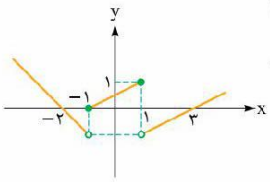
**خودت حل کنی بهتره** نمودار g را رسم کنید و حواستان به نقاط ناپیوستگی و تیز نمودار باشد.

**پاسخ تشریحی** **گام اول**: تابع g را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$g(x)=f(x)+|f(x)|=\begin{cases} 2f(x) & f(x)\ge 0 \\ 0 & f(x)<0 \end{cases}$$

**گام دوم**: برای به دست آوردن جواب $f(x)\ge 0$ باید دنبال محدوده‌هایی باشیم که نمودار f بالا یا روی محور xها قرار دارد و برای به دست آوردن جواب $f(x)<0$ باید دنبال محدوده‌هایی باشیم که نمودار f پایین محور xهاست.

این کار را در محدودهٔ $-2<x<3$ انجام می‌دهیم:



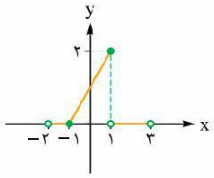

$$f(x)\ge 0 \Rightarrow -1\le x\le 1$$

$$f(x)<0 \Rightarrow -2<x<-1 \text{ یا } 1<x<3$$

**گام سوم**: g را می‌نویسیم:

$$g(x)=\begin{cases} 2f(x) & -1\le x\le 1 \\ 0 & -2<x<-1 \text{ یا } 1<x<3 \end{cases}$$

نمودارش را رسم می‌کنیم:




**گام چهارم**: با توجه به نمودار، طول نقاط مشتق‌ناپذیری g به صورت مقابل است:

$\underbrace{x=-1}_{\text{گوشه}}$ ، $\underbrace{x=1}_{\text{ناپیوستگی}}$

## تست و پاسخ 17

اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+b}{x^{۲}} & x\geq ۱\\ bx^{۲}+x & x<۱\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $۳a-b$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

**پاسخ: گزینه ۳**

**مشاوره** مشتق‌پذیری توابع دوضابطه‌ای به فرم $\begin{cases}g & x\geq a\\ h & x<a\end{cases}$ که اغلب هم دو مجهول دارند از سؤالات بسیار پرتکرار کنکور است. درس‌نامه را بخوانید.

**خودت حل کنی بهتره** در $x=۱$ باید دو شرط «پیوستگی» و «مشتق راست= مشتق چپ» بررسی شوند.

**درس نامه •• مشتق‌پذیری در مرز توابع چندضابطه‌ای**

اگر تابع $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\geq a\\ h(x) & x<a\end{cases}$ در $x-a$ مشتق‌پذیر باشد، باید دو شرط زیر را داشته باشد:

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | در $x=a$ پیوسته باشد. | $g(a)=h(a)$ |
| ۲ | مشتق راست و چپ در $x=a$ برابر باشد. | $g'(a)=h'(a)$ |

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}ax+۴ & x\geq ۲\\ x^{۳}+b & x<۲\end{cases}$ در $x-۲$ مشتق‌پذیر باشد، مقادیر a و b را محاسبه کنید.

۱) باید f در $x=۲$ پیوسته باشد:

$$\underbrace{۲a+۴}_{\text{مقدار حد راست}}=\underbrace{۲^{۳}+b}_{\text{حد چپ}}\Rightarrow ۲a-b=۴$$

۲) باید مشتق راست و چپ در $x=۲$ برابر باشد:

$$\underbrace{a}_{\text{مشتق راست}}=\underbrace{۳x^{۲}}_{\text{مشتق چپ}}\xrightarrow{x=۲}a=۱۲$$

پس $a=۱۲$ و $b=۲۰$ است.

**پاسخ تشریحی**

در تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+b}{x^{۲}} & x\geq ۱\\ bx^{۲}+x & x<۱\end{cases}$، نقطهٔ مرزی دامنه‌ها $x=۱$ است.

**گام اول:** باید f در $x=۱$ پیوسته باشد:

$$\underbrace{\frac{a(۱)+b}{۱^{۲}}}_{\text{حد راست و مقدار}}=\underbrace{b(۱)^{۲}+۱}_{\text{حدچپ}}\Rightarrow a+\cancel{b}=\cancel{b}+۱\Rightarrow a=۱$$

**گام دوم:** باید مشتق راست و چپ در $x=۱$ برابر باشند:

$$\left.\begin{array}{l}\text{راست}:\dfrac{x+b}{x^{۲}}\xrightarrow{\text{مشتق}}\dfrac{۱(x^{۲})-۲x(x+b)}{x^{۴}}\xrightarrow{x=۱}\dfrac{۱-۲-۲b}{۱}=-۱-۲b\\ \text{چپ}:bx^{۲}+x\xrightarrow{\text{مشتق}}۲bx+۱\xrightarrow{x=۱}۲b+۱\end{array}\right\}\xrightarrow{f'_{+}(۱)=f'_{-}(۱)}-۱-۲b=۲b+۱\Rightarrow b=-\frac{۱}{۲}$$

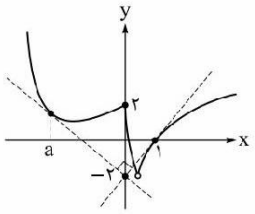
**گام سوم:**

$$۳a-b=۳\times ۱-(-\frac{۱}{۲})=\frac{۷}{۲}=۳/۵$$

## تست و پاسخ 18

نمودار تابع f داده شده است. $f'(a)$ کدام است؟

شیب خط مماس بر f در $x = a$




۱) $-۲$

۲) $\frac{-۱}{۳}$

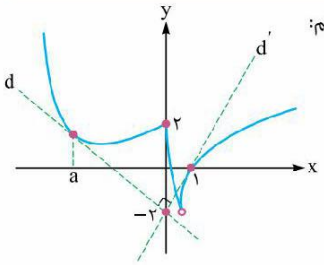
۳) $-۱$

۴) $\frac{-۱}{۲}$

**پاسخ: گزینه ۴**

**خودت حل کنی بهتره** وقتی دو خط بر هم عمودند، شیب‌هایشان قرینه و معکوس هم است.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** شیب خط $d'$ که از دو نقطهٔ $(۱,۰)$ و $(۰,-۲)$ می‌گذرد را حساب می‌کنیم:




$$m_{d'} = \frac{-۲-۰}{۰-۱} = ۲$$

**گام دوم:** خط d بر خط $d'$ عمود است، پس شیبش، قرینه و معکوس شیب d است:

$$m_d = \frac{-۱}{m_{d'}} = \frac{-۱}{۲}$$

**گام سوم:** $m_d$ همان $f'(a)$ است؛ پس:

$$f'(a) = \frac{-۱}{۲}$$

## تست و پاسخ 19

اگر $f(x) = ۳x - |x-۱|$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-} \frac{f(۱-h)-f(۱+۳h)}{h}$ کدام است؟

۱) وجود ندارد.

۲) $-۸$

۳) $-۱۰$

۴) $-۱۴$

**پاسخ: گزینه ۴**

**خودت حل کنی بهتره** از هوپیتال استفاده کنید و بعدش جای hهای صورت، $۰^-$ قرار دهید تا $۱^+$ و $۱^-$ بودنشان معلوم شود.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** تابع $f(x) = ۳x - |x-۱|$ در $x = ۱$ پیوسته است، پس جواب ۱ نمی‌تواند باشد.

f را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = ۳x - |x-۱| = \begin{cases} ۳x-(x-۱) & x \ge ۱ \\ ۳x-(-x+۱) & x < ۱ \end{cases} = \begin{cases} \boxed{۲}\,x+۱ & x \ge ۱ \\ \boxed{۴}\,x-۱ & x < ۱ \end{cases}$$

مشتق راست

مشتق چپ

**گام دوم:** می‌دانیم مشتق $f(\bigcirc)$ برابر با $f'(\bigcirc).\bigcirc'$ است. به کمک این رابطه و قاعدهٔ هوپیتال، حاصل حد داده‌شده (که $\frac{۰}{۰}$ است) را به دست می‌آوریم:

$$f(\bigcirc) \xrightarrow{\text{مشتق}} \bigcirc'.f'(\bigcirc)$$

$$\lim_{h\to ۰^-} \frac{f(۱-h)-f(۱+۳h)}{h} \overset{Hop}{=\!=} \lim_{h\to ۰^-} \frac{-۱\times f'(۱-h)-۳\times f'(۱+۳h)}{۱} = \lim_{h\to ۰^-}(-f'(۱-h)-۳f'(۱+۲h))$$

**گام سوم:** جای hهای داخل پرانتز باید $۰^-$ قرار دهیم تا جنس ۱ها معلوم شود.

$$-f'(۱-\underbrace{h}_{۰^-})-۳f'(۱+\underbrace{۳h}_{۰^-}) = -\underbrace{f'(۱^+)}_{۲}-۳\underbrace{f'(۱^-)}_{۴} = -۲-۳(۴) = -۱۴$$

## تست و پاسخ 20

اگر $f(x)=(2x-1)^2.\sqrt{2x}$، آن‌گاه $f''(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲

۳) ۸ ۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۳**

**مشاوره** هر وقت در مشتق‌گیری احساس کردید حجم محاسبات زیاد است، شک کنید! شاید راه ساده‌تری (مثل ساده‌کردن یا عامل صفرکننده یا ...) داشته باشد.

**خودت حل‌کنی بهتره** از عامل صفرکننده دو بار مشتق بگیرید و به $\sqrt{2x}$ دست نزنید.

**درس‌نامه** عامل صفرکننده در مشتق دوم

برای محاسبهٔ مشتق دوم تابع $f(x)=(x-a)^2g(x)$ در $x=a$، فقط از $(x-a)^2$ دو بار مشتق می‌گیریم و به $g(x)$ دست نمی‌زنیم.

مثال: اگر $f(x)=(x-2)^2\sqrt[3]{5x-2}$ باشد، مقدار $f''(2)$ چه‌قدر است؟

دو بار مشتق

$$(x-2)^2\ \sqrt[3]{5x-2} \rightarrow 2\sqrt[3]{5x-2} \xrightarrow{x=2} 2\times 2=4 \xrightarrow{\text{پس}} f''(2)=4$$

عامل صفرکننده — خودش

**پاسخ تشریحی** **گام اول**: برای محاسبهٔ $f''(\frac{1}{2})$ در تابع $f(x)=(2x-1)^2\sqrt{2x}$، باید از $(2x-1)^2$ که عامل صفرکننده است دو مرتبه مشتق بگیریم:

$$(2x-1)^2 \xrightarrow{'} \text{مشتق اول}=2(2x-1)\underbrace{(2x-1)'}_{2}=4(2x-1)=8x-4 \xrightarrow{''} \text{مشتق دوم}=8$$

**گام دوم**: جای $(2x-1)^2$، عدد ۸ را قرار می‌دهیم و به $\sqrt{2x}$ دست نمی‌زنیم: $8.\sqrt{2x}$

**گام سوم**: حالا $x=\frac{1}{2}$ را جای‌گذاری می‌کنیم: $8\times\sqrt{1}=8$

پس: $f''(\frac{1}{2})=8$

## تست و پاسخ 21

اگر $f(x)=x\sqrt[3]{(\frac{3x+2}{x-1})^2}$ باشد، مقدار $f'(2)$ کدام است؟

۱) $-\frac{68}{3}$ ۲) $-\frac{26}{3}$

۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

**پاسخ: گزینه ۳**

**مشاوره** از فرمول‌های مشتق حتماً یک سؤال در کنکور می‌آید (شبیه این سؤال). پیشنهاد می‌کنم برای مشتق‌گیری از تابع‌های $y=\sqrt[n]{u^m}$ آن را به صورت $y=u^{\frac{m}{n}}$ دیده و از مشتق توان استفاده کنید.

**خودت حل‌کنی بهتره** اگر $y=u^{\frac{m}{n}}$ باشد، $y'=\frac{m}{n}u^{\frac{m}{n}-1}$.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** تابع را به صورت $f(x)=x\times(\frac{3x+2}{x-1})^{\frac{2}{3}}$ می‌نویسیم.

**گام دوم:** از مشتق ضرب دو تابع داریم:

$$f'(x)=1\times(\frac{3x+2}{x-1})^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(\frac{3x+2}{x-1})^{\frac{2}{3}-1}\times(\frac{3x+2}{x-1})'\times x=(\frac{3x+2}{x-1})^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(\frac{3x+2}{x-1})^{-\frac{1}{3}}\times\frac{-5}{(x-1)^2}\times x$$

**گام سوم:** مقدار ۲ را به جای x جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f'(2)=8^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(8)^{-\frac{1}{3}}\times\frac{-5}{1}\times 2=(2^3)^{\frac{2}{3}}-\frac{20}{3}(2^3)^{-\frac{1}{3}}=4-\frac{20}{3}\times\frac{1}{2}=4-\frac{10}{3}=\frac{2}{3}$$

## تست و پاسخ 22

**اگر $y=x\sqrt{x}+3\sqrt{x}$، آن‌گاه حاصل عبارت $8y'y''$ برای xهای مثبت کدام است؟**

۱) $18(1+\frac{1}{x^2})$ ۲) $18(1-\frac{1}{x^2})$ ۳) $9(1+\frac{1}{x^2})$ ۴) $9(1-\frac{1}{x^2})$

**پاسخ: گزینه ۴**

**مشاوره** **اگر از عبارت‌هایی به فرم $x^a\sqrt[n]{x^b}$ خواستید یک مرتبه یا دو مرتبه (یا بیشتر) مشتق بگیرید، اول آن‌ها را به شکل $x^{\square}$ بنویسید و بعد مشتق بگیرید.**

**خودت حل کنی بهتره** جای $x\sqrt{x}$ و $\sqrt{x}$ به ترتیب $x^{\frac{3}{2}}$ و $x^{\frac{1}{2}}$ بنویسید و بعد $y'$ و $y''$ را حساب کنید.

**درس‌نامه** مشتق مرتبهٔ دوم

مشتق دوم تابع $f(x)$ در $x-a$ را با $f''(a)$ نشان می‌دهیم. برای محاسبه‌اش دوتا کار می‌توانیم انجام دهیم:

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | مشتق‌گیری متوالی | $f(x)\xrightarrow{\text{مشتق}}f'(x)\xrightarrow{\text{مشتق}}f''(x)\xrightarrow[\text{a قرار می‌دهیم.}]{\text{جای x،}}f''(a)$ |
| ۲ | به کمک تعریف | $f''(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$ |

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** عبارات رادیکالی را با توان گویا می‌نویسیم:

$$y=x\sqrt{x}+3\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}$$

**گام دوم:** $y'$ را حساب می‌کنیم:

$$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$$

**گام سوم:** از $y'$ مشتق می‌گیریم تا به $y''$ برسیم:

$$y''=\frac{3}{2}(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}})=\frac{3}{4}(x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}})$$

**گام چهارم:** عبارت $8y'y''$ را تشکیل می‌دهیم:

$$8y'y''=8\times\frac{3}{2}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\times\frac{3}{4}(x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}})=9(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}})=9(1-\cancel{\frac{1}{x}}+\cancel{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2})=9(1-\frac{1}{x^2})$$

## تست و پاسخ 23

**اگر $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x}}$ و $g(x)=\sqrt[4]{1+x^2}$ باشد، آن‌گاه مشتق تابع gof در $x=1$ برابر با $2^k$ است. مقدار k کدام است؟**

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{7}{2}$

**پاسخ: گزینه ۱**

**مشاوره** در سؤالات مشتق fog که عبارات کمی شلوغ هستند، خطرناک‌ترین کار، عجله است! با حوصله و مرحله به مرحله حل کنید.

**درس‌نامه •• مشتق تابع مرکب**

برای به دست آوردن مشتق fog دوتا کار می‌توانیم انجام دهیم. بسته به مسئله، یکی راحت‌تر از دیگری می‌شود.

۱) از قاعدهٔ زنجیره‌ای استفاده کنیم:

$$(f(g(x))' = \overbrace{g'(x)}^{\text{مشتق } g} . \underbrace{f'(g(x))}_{\text{اول } f'(x) \text{ را حساب می‌کنیم و بعد جای xهایش } g(x) \text{ قرار می‌دهیم.}}$$

۲) $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم و بعد از آن مشتق می‌گیریم.

**پاسخ تشریحی** راه اول: **گام اول**: gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = \sqrt[4]{1+(f(x))^2} = \sqrt[4]{1+x+2\sqrt{x}} = \sqrt[4]{(\sqrt{x}+1)^2} = \sqrt{\sqrt{x}+1}$$

**گام دوم**: مشتق می‌گیریم:

$$y = \sqrt{\sqrt{x}+1} \Rightarrow y' = \frac{(\sqrt{x}+1)'}{2\sqrt{\sqrt{x}+1}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\sqrt{x}+1}}$$

**گام سوم**: $x=1$ را قرار می‌دهیم:

$$y'(1) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} = 2^{\frac{-5}{2}}$$

پس:

$$k = \frac{-5}{2}$$

راه دوم: **گام اول**: مشتق gof در $x=1$ را به شکل ریاضی می‌نویسیم:

$$(gof)'(1) = \underbrace{f'(1)}_{\text{گام سوم}} \times \underbrace{g'(f(1))}_{\text{گام چهارم}}$$

**گام دوم**: $f'$ و $g'$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{\underbrace{x+2\sqrt{x}}_{u}} \xrightarrow{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}} f'(x) = \frac{1+2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}}$$

$$g(x) = \sqrt[4]{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{4}} \xrightarrow{(u^n)' = nu^{n-1}.u'} g'(x) = \frac{1}{4}(1+x^2)^{-\frac{3}{4}} \times (2x) = \frac{x}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{4}}$$

**گام سوم**: مقدار $f'(1)$ برابر است با:

$$f'(x) = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1+1}{2\sqrt{1+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

**گام چهارم**:

- مقدار $f(1)$ برابر است با:

$$f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x}} \Rightarrow f(1) = \sqrt{1+2(1)} = \sqrt{3}$$

- پس $g'(f(1))$ یعنی $g'(\sqrt{3})$ که برابر است با:

$$g'(x) = \frac{x}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{4}} \Rightarrow g'(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+3)^{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times(2^2)^{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

**گام پنجم**: مقادیر به‌دست‌آمده را در عبارت گام اول جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(gof)'(1) = \underbrace{f'(1)}_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \times \underbrace{g'(f(1))}_{\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2^2 \times 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} = 2^{-\frac{5}{2}}$$

پس:

$$k = \frac{-5}{2}$$

## تست و پاسخ 24

**اگر $y = ۳ - ۲x$ معادلهٔ خط مماس بر نمودار $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = ۲$ باشد و $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-a}{h} = b$، آن‌گاه مقدار $b - a$ کدام است؟**

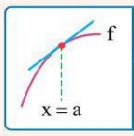
۱) ۱ ۲) ۱− ۳) ۳ ۴) ۳−

**پاسخ: گزینه ۳**

**مشاوره** حدهای به‌فرم $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+nh)-f(a+mh)}{kh}$ را به‌کمک هوپیتال و با استفاده از قاعدهٔ $f(u) \xrightarrow{\text{مشتق}} u'.f'(u)$ راحت‌تر می‌توان حل کرد.

**خودت حل کنی بهتره** اگر خطی بر تابع f در $x = a$ مماس باشد، اولاً خط و تابع در آن نقطه مشترک‌اند، ثانیاً شیب خط مماس برابر با $f'(a)$ است.

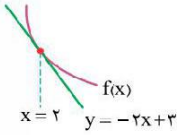
**درس‌نامه** اگر خط $g(x) = mx + h$ در نقطه‌ای به طول a بر منحنی $f(x)$ مماس باشد، آن‌گاه دو تا تساوی مهم داریم:




| | | |
|---|---|---|
| ۱ | خط و منحنی در نقطهٔ $x = a$ مشترک‌اند. | $f(a) = g(a)$ |
| ۲ | شیب خط با مشتق f در $x = a$ برابر است. | $f'(a) = m$ |

**نکته** $f(u) \xrightarrow{\text{مشتق}} u'.f'(u)$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** خط $y = -۲x + ۳$ در نقطهٔ $x = ۲$ بر تابع $f(x)$ مماس است؛ پس:




- اولاً مقدار خط مماس و تابع در $x = ۲$ یکسان است: $f(۲) = -۲(۲) + ۳ = -۱$
- ثانیاً شیب خط مماس همان مشتق f در $x = ۲$ است. $f'(۲) = \underset{\text{شیب خط مماس یا } m_{\text{مماس}}}{-۲}$

**گام دوم:** حد $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-a}{h} = b$ موجود است. با جای‌گذاری $h = ۰$، صورت به شکل $f(۲) \quad a$ درمی‌آید. چون حد مخرج صفر است، پس حد صورت یعنی $f(۲) - a$ هم صفر است؛ در نتیجه:

$$a = \underbrace{f(۲)}_{-۱} \Rightarrow a = -۱$$

**گام سوم:** حد $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-a}{h} = b$ را به کمک هوپیتال حساب می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-a}{h} \overset{Hop}{=\!=} \lim_{h\to ۰}\frac{-۱\times f'(۲-h)-۰}{۱} = -\underbrace{f'(۲)}_{-۲} = ۲$$

حاصل این حد b شده بود، پس: $b = ۲$.

**گام چهارم:**

$$b - a = ۲ - (-۱) = ۳$$

## تست و پاسخ 25

**اگر $f(x) = (x^۲ + ax + b)[x]$ در $[۰,۲)$ مشتق‌پذیر باشد، $f'(\frac{۳}{۲})$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)**

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) ۲ ۴) صفر

**پاسخ: گزینه ۱**

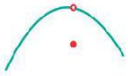
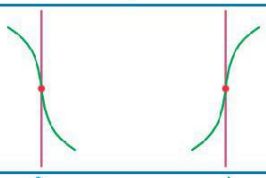
**مشاوره** شروط پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع به فرم $y = [x]g(x)$ در نقاط صحیح را بلد باشید.

**خودت حل کنی بهتره** $[x]$ در بازهٔ $[۰,۲)$ در $x = ۱$ ناپیوسته است.

**نکته** اگر $[x].g(x)$ در $x = k \in \mathbb{Z}$ مشتق‌پذیر باشد، باید $g(x)$ عامل $(x-k)^۲$ داشته باشد.

مثلاً اگر $f(x) = [x](ax^۲ + bx + c)$ در $x = ۳$ مشتق‌پذیر باشد، باید $ax^۲ + bx + c$ برابر با $a(x-۳)^۲$ باشد.

**درس‌نامه** نقاط مشتق‌ناپذیری

| اسم نقطه | توضیح | کجا داریم؟ | مثال نموداری |
|---|---|---|---|
| نقاط ناپیوستگی | هر نقطه‌ای که تابع در آن ناپیوسته باشد، قطعاً مشتق‌ناپذیر هم است. | ریشه‌های مخرج<br>نقاط صحیح داخل براکت<br>مرز توابع چندضابطه‌ای |  |
| گوشه | اولاً تابع در آن پیوسته است. ثانیاً «مشتق‌های چپ و راست دو عدد نابرابرند» یا «مشتق یک طرف عدد و طرف دیگر، بی‌نهایت است». | ریشه‌های سادهٔ قدرمطلق<br>مرز توابع چندضابطه‌ای | |
| عطف قائم | مشتق‌های دو طرف، بی‌نهایت‌های هم‌علامت هستند. | عامل صفرشونده داخل رادیکال |  |
| بازگشتی | مشتق‌های دو طرف بی‌نهایت‌های ناهم‌علامت هستند. | | |

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** عبارت $[x]$ در بازهٔ $[0,2)$، در نقطهٔ $x-1$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

**گام دوم:** برای آن‌که $(x^2+ax+b)[x]$ در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، باید $x^2+ax+b$ عامل $(x-1)^2$ داشته باشد. با توجه به ضریب $x^2$ که یک است، $x^2+ax+b$ همان $(x-1)^2$ است؛ پس ضابطهٔ f به شکل $f(x)=(x-1)^2[x]$ شد.

**گام سوم:** برای محاسبهٔ $f'(\frac{3}{2})$، باید ضابطهٔ f را در $x=\frac{3}{2}$ بدون براکت بنویسیم و از آن مشتق بگیریم.

$$(x-1)^2\underbrace{[\tfrac{3}{2}]}_{1}=(x-1)^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2(x-1) \xrightarrow{x=\frac{3}{2}} 2(\tfrac{3}{2}-1)=1$$

پس:

$$f'(\tfrac{3}{2})=1$$

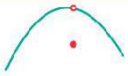
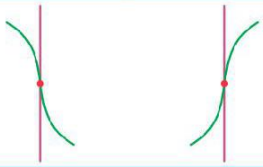
## تست و پاسخ 26

تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع $f(x)=\begin{cases}|x^2-5x| & x\geq 1\\ -\sqrt[3]{x+1} & x<1\end{cases}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ: گزینه ۴**

**درس‌نامه** نقاط مشتق‌ناپذیری

| اسم نقطه | توضیح | کجا داریم؟ | مثال نموداری |
|---|---|---|---|
| نقاط ناپیوستگی | هر نقطه‌ای که تابع در آن ناپیوسته باشد، قطعاً مشتق‌ناپذیر هم است. | ریشه‌های مخرج<br>نقاط صحیح داخل براکت<br>مرز توابع چندضابطه‌ای |  |
| گوشه | اولاً تابع در آن پیوسته است. ثانیاً «مشتق‌های چپ و راست دو عدد نابرابرند» یا «مشتق یک طرف عدد و طرف دیگر، بی‌نهایت است». | ریشه‌های سادهٔ قدرمطلق<br>مرز توابع چندضابطه‌ای | |
| عطف قائم | مشتق‌های دو طرف، بی‌نهایت‌های هم‌علامت هستند. | عامل صفرشونده داخل رادیکال |  |
| بازگشتی | مشتق‌های دو طرف بی‌نهایت‌های ناهم‌علامت هستند. | | |

**پاسخ تشریحی** چیزهایی که باید بررسی کنیم:

۱) ریشه‌های داخل قدرمطلق ضابطهٔ بالا

۲) ریشه‌های داخل رادیکال ضابطهٔ پایین

۳) نقطهٔ مرزی دامنه‌ها

**گام اول:** ریشه‌های داخل قدرمطلق ضابطهٔ بالا که در محدودهٔ $x > 1$ هستند، نقطهٔ گوشه‌اند:

$$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{x} \\ x = 5 & \text{گوشه} \end{cases}$$

**گام دوم:** ریشه‌های داخل رادیکال ضابطهٔ پایین که در محدودهٔ $x < 1$ هستند، عطف قائم هستند:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \checkmark$$

**گام سوم:** در نقطهٔ مرزی دامنه‌ها یعنی $x = 1$، اول پیوستگی را چک می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{حد راست و مقدار}: \left|x^2 - 5x\right| \xrightarrow{x=1} 4 \\ \text{چپ}: -\sqrt[3]{x+1} \xrightarrow{x=1} -\sqrt[3]{2} \end{array}\right\} \xrightarrow{4 \neq -\sqrt[3]{2}} \text{ناپیوسته} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

**گام چهارم:** در کل سه نقطهٔ مشتق‌ناپذیر داریم: $\underbrace{x = 1}_{\text{ناپیوسته}}$ , $\underbrace{x = -1}_{\text{عطف قائم}}$ , $\underbrace{x = 5}_{\text{گوشه}}$

## تست و پاسخ 27

**اگر $f(x) = ax + |x|$ و $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$، آن‌گاه مقدار a کدام باشد تا تابع fog در $x = 0$ دارای مشتق باشد؟**

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۲**

**مشاوره** **شبیه این سؤال دو بار در کنکورهای سراسری آمده است. بهترین راه این است که در $0^+$ و $0^-$ ضابطه‌های fog را بدون قدرمطلق بنویسید و بعد مشتق‌هایشان را برابر قرار دهید.**

**درس‌نامه** مشتق تابع مرکب

برای به دست آوردن مشتق fog دوتا کار می‌توانیم انجام دهیم. بسته به مسئله، یکی راحت‌تر از دیگری می‌شود.

۱) از قاعدهٔ زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم:

$$(f(g(x))' = \overbrace{g'(x)}^{\text{مشتق g}} . \underbrace{f'(g(x))}_{\substack{\text{اول } f'(x) \text{ را حساب می‌کنیم و} \\ \text{بعد جای xهایش } g(x) \text{ قرار می‌دهیم.}}}$$

۲) $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم و بعد از آن مشتق می‌گیریم.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x)) = a\,g(x) + |g(x)| = a(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|) + \left|\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|\right|$$

**گام دوم:** در دو محدودهٔ $x \geq 0$ و $x < 0$، fog را بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

- $x \geq 0: a(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x) + \left|\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x\right| = a(\frac{x}{3}) + \left|\frac{x}{3}\right| = \frac{ax}{3} + \frac{x}{3} = \frac{a+1}{3}x$
- $x < 0: a(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x) + \left|\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x\right| = ax + \underbrace{|x|}_{-x} = ax - x = (a-1)x$

**گام سوم:** تابع fog در $x = 0$ پیوسته است؛ پس فقط باید مشتق راست و چپ آن برابر باشند:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0: \frac{a+1}{3}x \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{a+1}{3} \\ x < 0: (a-1)x \xrightarrow{\text{مشتق}} a-1 \end{array}\right\} \xrightarrow{f'_+(0) = f'_-(0)} \frac{a+1}{3} = a - 1 \Rightarrow a + 1 = 3a - 3 \Rightarrow a = 2$$

## تست و پاسخ 28

تابع $f(x)=ax^{3}+b$ مفروض است. اگر تابع $g(x)=\begin{cases} f(x) & x\le 1 \\ 3x+f'(x) & x>1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲ ۴) ۱

**پاسخ: گزینه ۴**

**مشاوره** تیپ بسیار مهمی است که معمولاً یک سؤال از آن در کنکور می‌آید. حواستان به شرط پیوستگی باشد.

**خودت حل کنی بهتره** شرط پیوستگی و مشتق‌پذیری را بنویسید تا a و b به دست آید.

### درس‌نامه ●● ارتباط پیوستگی و مشتق‌پذیری

| |
|---|
| مشتق در a |
| پیوستگی در a |

ارتباط پیوستگی و مشتق‌پذیری به صورت ساختمان دو طبقهٔ مقابل است:

**قضیه:** اگر f در a مشتق داشته باشد (طبقهٔ دوم داشته باشد)، در a پیوسته است (طبقهٔ اول هم دارد).

**نتیجه** اگر f در a پیوسته نباشد (طبقهٔ اول نداشته باشد)، مشتق هم ندارد (طبقهٔ دوم هم ندارد)، ولی اگر پیوسته باشد (طبقهٔ اول داشته باشد)، ممکن است در a مشتق داشته باشد یا نه.

### درس‌نامه ●● مشتق چپ و راست

مشتق راست تابع f در $x=a$:

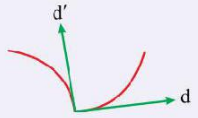
$$f'_{+}(a)=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق چپ تابع f در $x=a$:

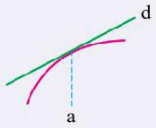
$$f'_{-}(a)=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a^{-}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

**نکات** ۱) اگر $f'_{+}(a)=f'_{-}(a)$ (دو عدد مساوی باشند)، آن‌گاه $f'(a)$ هم وجود داشته و برابر با مشتق‌های چپ و راست است، اما اگر مشتق چپ و راست دو عدد مختلف باشند، $f'(a)$ موجود نیست.

۲) مشتق راست (چپ) در صورت وجود، شیب نیم‌مماس راست (چپ) را نشان می‌دهند. مثلاً:




$$\begin{cases} f'_{+}(a)=m_{d} \\ f'_{-}(a)=m_{d'} \\ f'(a)=\text{موجود نیست.} \end{cases}$$




$$f'_{+}(a)=f'_{-}(a)=f'(a)=m_{d}$$

۳) برای به دست آوردن مشتق‌های چپ و راست در امتحان نهایی از تعریف آن‌ها استفاده کنید.

۴) اگر تابع f از راست پیوسته باشد، برای به دست آوردن $f'_{+}(a)$ می‌توانیم از فرمول‌های مشتق استفاده کنیم.

۵) اگر تابع f از چپ پیوسته باشد، برای به دست آوردن $f'_{-}(a)$ می‌توانیم از فرمول‌های مشتق استفاده کنیم.

### درس‌نامه ●● مشتق‌پذیری در توابع چندضابطه‌ای

اگر تابع دو ضابطه‌ای $y=\begin{cases} f(x) & x\ge a \\ g(x) & x<a \end{cases}$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، دو شرط باید برقرار باشد:

۱) پیوستگی در $x=a$

۲) برابری مشتق چپ و راست در $x=a$ $(f'(a)=g'(a))$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** $f'(x)=3ax^2$

**گام دوم:** تابع $g(x)$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است؛ پس در این نقطه پیوسته است، یعنی حد چپ و راست و مقدار تابع در این نقطه مساوی هستند:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax^3+b)=a+b=g(1)\\ \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+3ax^2)=3+3a\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=3+3a\Rightarrow -2a+b=3\ \ (I)$$

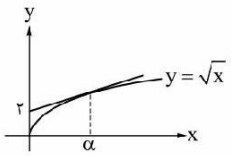
**گام سوم:** شرط دوم مشتق‌پذیری، برابری مشتق چپ و راست در $x=1$ است؛ چون تابع در $x=1$ پیوسته است، مشتق چپ و راست را با فرمول‌ها به دست می‌آوریم:

$$g(x)=\begin{cases}ax^3+b & x\le 1 \xrightarrow{\text{مشتق}} 3ax^2 \Rightarrow g'_-(1)=3a\\ 3x+3ax^2 & x>1 \xrightarrow{\text{مشتق}} 3+6ax \Rightarrow g'_+(1)=3+6a\end{cases}\Rightarrow 3a=3+6a\Rightarrow a=-1$$

با جای‌گذاری در (I)، $b=1$ به دست می‌آید.

## تست و پاسخ 29

**در شکل زیر خط d بر نمودار $y=\sqrt{x}$ مماس شده است. مقدار $\alpha$ کدام است؟**




۱) ۴ ۲) ۲۵

۳) ۹ ۴) ۱۶

**پاسخ: گزینه ۴**

**خودت حل کنی بهتره** شیب خط گذرنده از نقاط $(\alpha,\sqrt{\alpha})$ و $(0,2)$ را با مشتق $y=\sqrt{x}$ در $x=\alpha$ برابر قرار دهید.

**درس‌نامه** **خط مماس بر منحنی از نقطه‌ای خارج آن**

فرض کنید از نقطهٔ A بر نقطه‌ای به طول $x=a$ روی منحنی f مماس رسم کرده‌ایم:

در این صورت شیب این خط مماس را از دو راه می‌توانیم حساب کنیم:

۱) شیب خط گذرنده از نقاط A و B: $m_{AB}=\dfrac{f(a)-y_A}{a-x_A}$

۲) مشتق تابع f در $x=a$: $m_{AB}=f'(a)$

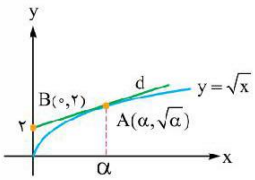
از برابر قراردادن دو مقدار بالا به یک معادله می‌رسیم. از حل این معادله، مقدار مجهولات را به دست می‌آوریم.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در $x=\alpha$ حساب می‌کنیم: $f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(\alpha)=\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}$

پس شیب d برابر با $m_d=\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ است.

**گام دوم:** دو نقطه از خط d را داریم؛

شیب خط گذرنده از A و B را حساب می‌کنیم: $m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{2-\sqrt{\alpha}}{0-\alpha}=\dfrac{\sqrt{\alpha}-2}{\alpha}$




**گام سوم:** شیب به‌دست‌آمده با مشتق f در $x=\alpha$ برابر است؛ پس:

$$m_{AB}=f'(\alpha)\Rightarrow\frac{\sqrt{\alpha}-2}{\alpha}=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\Rightarrow\alpha=2\alpha-4\sqrt{\alpha}\Rightarrow\alpha=4\sqrt{\alpha}\xrightarrow[(\alpha\neq 0)]{\div\sqrt{\alpha}}\sqrt{\alpha}=4\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha=16$$

## تست و پاسخ 30

**توابع مشتق‌پذیر f و g مفروض‌اند. اگر $g(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x}$ و $f(g(x))=5x^2-6x+1$، آن‌گاه $f'(2)$ کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) $-4$ ۴) $-8$

**پاسخ: گزینه ۴**

**خودت حل کنی بهتره** مشتق $f(g(x))$ می‌شود $g'(x).f'(g(x))$؛ دنبال xی باشید که حاصل $g(x)$ را ۲ کند.

**نکته** $f(g(x)) \xrightarrow{\text{مشتق}} g'(x).f'(g(x))$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** اول ضابطهٔ g را ساده می‌کنیم و بعد از آن مشتق می‌گیریم:

$$g(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x}=\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}=1+\frac{1}{\sqrt{x}}=1+x^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow g'(x)=0-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow g'(x)=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

**گام دوم:** چون $f'(2)$ را می‌خواهیم و $f(g(x))$ را داریم، پس باید دنبال xی باشیم که به ازای آن $g(x)$ برابر با ۲ می‌شود:

$$g(x)=2\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{x}}=2\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}=1\Rightarrow x=1$$

**گام سوم:** از طرفین تساوی $f(g(x))=5x^2-6x+1$ مشتق می‌گیریم و $x=1$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$g'(x).f'(g(x))=10x-6\xrightarrow{x=1}\underbrace{g'(1)}_{\text{گام اول}}.f'(\underbrace{g(1)}_{2})=4\Rightarrow \frac{-1}{2}f'(2)=4\Rightarrow f'(2)=-8$$

## تست و پاسخ 31

**اگر $f(x+2)=-f(x)$ باشد و f در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، در $x=1$ مشتق تابع $y=f(3x^2+2x)$ چند برابر مشتق تابع $y=f(4x-3)$ است؟**

۱) ۲ ۲) $-2$ ۳) ۴ ۴) $-4$

**پاسخ: گزینه ۱**

**خودت حل کنی بهتره** از طرفین تساوی $f(x+2)=-f(x)$ مشتق بگیرید و بعد $x=1$ و $x=3$ را در آن جای‌گذاری کنید.

**نکته** $f(\square)\xrightarrow{\text{مشتق}}\square'.f'(\square)$

**مثال:** $f(2x^2-6x)\xrightarrow{\text{مشتق}}\underbrace{(2x^2-6x)'}_{4x-6}.f'(2x^2-6x)=(4x-6).f'(2x^2-6x)$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** به کمک قاعدهٔ $f(\square)\xrightarrow{\text{مشتق}}\square'.f'(\square)$، مشتق توابع $f(3x^2+2x)$ و $f(4x-3)$ را در $x-1$ حساب می‌کنیم:

- $f(3x^2+2x)\xrightarrow{\text{مشتق}}(3x^2+2x)'.f'(3x^2+2x)=(6x+2)f'(3x^2+2x)\xrightarrow{x=1}8f'(5)$
- $f(4x-3)\xrightarrow{\text{مشتق}}(4x-3)'.f'(4x-3)=4f'(4x-3)\xrightarrow{x=1}4f'(1)$

**گام دوم:** از طرفین رابطهٔ $f(x+2)=-f(x)$ مشتق می‌گیریم: $1f'(x+2)=-f'(x)\Rightarrow f'(x+2)=-f'(x)$

**گام سوم:** چون دنبال رابطهٔ $f'(1)$ و $f'(5)$ هستیم، در تساوی بالا یک بار $x=1$ و یک بار $x=3$ را قرار می‌دهیم:

$$f'(x+2)=-f'(x)\xrightarrow{x=1}f'(3)=-f'(1)$$

$$f'(x+2)=-f'(x)\xrightarrow{x=3}f'(5)=-\underbrace{f'(3)}_{-f'(1)}\rightarrow f'(5)=f'(1)$$

**گام چهارم:** نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{8\cancel{f'(5)}^{1}}{4\cancel{f'(1)}_{1}}=2$$

## تست و پاسخ 32

**اگر نیم‌مماس‌های رسم‌شده بر نمودار تابع $f(x)=a|x^2-2x|\sqrt{x-1}$ در نقطهٔ گوشه‌ای آن بر هم عمود باشند، a کدام است؟**

۱) $\pm\frac{1}{4}$ ۲) $\pm\frac{1}{2}$ ۳) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\pm\sqrt{2}$

**پاسخ: گزینه ۲**

**خودت حل کنی بهتره** ریشهٔ داخل قدرمطلقی که زیر رادیکال را منفی نکند، طول نقطهٔ گوشه است.

## درس‌نامه •• نقطهٔ گوشه

| | |
|---|---|
| **معروف‌ترین نقاط گوشه** | ۱) ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق. مثلاً در تابع $y=\left\|x^{۲}-۹\right\|+\left\|x\right\|$، $x=\pm ۳$ و $x=۰$ گوشه هستند.<br>۲) نقاط مرزی دامنه در توابع چندضابطه‌ای که تابع در آن‌ها پیوسته است، ولی $f'_{+}$ و $f'_{-}$ برابر نیستند. مثل $x-۲$ در $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geq ۲ \\ x+۲ & x<۲ \end{cases}$. |
| **شیب نیم‌مماس‌ها** | شیب نیم‌مماس چپ: همان مشتق چپ یا $f'_{-}(a)$ است.<br>شیب نیم‌مماس راست: همان مشتق راست یا $f'_{+}(a)$ است. |
| **معادلهٔ نیم‌مماس‌ها** | نیم‌مماس چپ: $y-f(a)=f'_{-}(a)(x-a)$<br>نیم‌مماس راست: $y-f(a)=f'_{+}(a)(x-a)$ |
| **زاویهٔ بین نیم‌مماس‌ها** | اگر نیم‌مماس‌ها بر هم عمود باشند باید شیب‌هایشان، قرینه و معکوس هم باشد: <br>اگر زاویهٔ بین دو نیم‌مماس را از ما خواستند و بر هم عمود نبودند، باید یک شکل تقریبی برای f بکشیم و روی آن تحلیل کنیم. |

**پاسخ تشریحی** **گام اول**: ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=a\left|x^{۲}-۲x\right|\sqrt{x-۱}$ را حساب می‌کنیم: زیر رادیکال $\geq ۰ \Rightarrow x-۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۱$

**گام دوم**: ریشه‌های داخل قدرمطلق، طول نقطهٔ گوشه هستند:

$$x^{۲}-۲x=۰ \Rightarrow x(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \ \times \ (\text{در } D_f \text{ نیست.}) \\ x=۲ \ \checkmark \end{cases}$$

**گام سوم**: ضابطهٔ f را به شکل روبه‌رو می‌نویسیم:

$$f(x)=a\left|x\right|\underbrace{\left|x-۲\right|}_{\text{عامل صفرکننده}}\sqrt{x-۱}$$

برای محاسبهٔ مشتق چپ و راست در $x=۲$، فقط از عامل صفرکننده مشتق می‌گیریم:

ضابطهٔ f در $۲^{+}$ بدون قدرمطلق: $ax\sqrt{x-۱}\,(x-۲) \xrightarrow{\text{خودش}} ax\sqrt{x-۱}\,(۱) \xrightarrow{x=۲} \underbrace{۲a}_{\text{مشتق راست}}$ (شیب نیم‌مماس راست)

مشتق

ضابطهٔ f در $۲^{-}$ بدون قدرمطلق: $ax\sqrt{x-۱}\,(-x+۲) \xrightarrow{\text{خودش}} ax\sqrt{x-۱}\,(-۱) \xrightarrow{x=۲} \underbrace{-۲a}_{\text{مشتق چپ}}$ (شیب نیم‌مماس چپ)

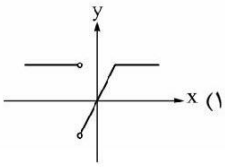
مشتق

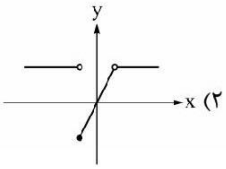
**گام چهارم**: برای آن‌که نیم‌مماس‌ها بر هم عمود باشند، باید شیب‌هایشان قرینه و معکوس هم باشد:

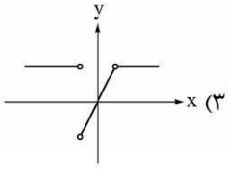
$$f'_{+}(۲)=\frac{-۱}{f'_{-}(۲)} \Rightarrow ۲a=\frac{-۱}{-۲a} \Rightarrow ۴a^{۲}=۱ \Rightarrow a^{۲}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲}$$

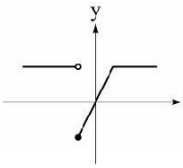
## تست و پاسخ 33

نمودار تابع مشتق $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & |x|\le ۱ \\ ۲x+۳ & |x|>۱ \end{cases}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

**پاسخ: گزینه ۳**

**مشاوره** کتاب به نمودار تابع مشتق اهمیت زیادی داده است. این سؤال هم در کنکور و هم در نهایی می‌تواند مطرح شود.

**خودت حل کنی بهتره** وضعیت مشتق را در نقاط $\pm ۱$ و غیر این نقاط بررسی کنید.

**درس‌نامه** به دست آوردن تابع مشتق و نمودار آن

$f$ یک تابع است. تابع مشتق $(f')$ تابعی است که دامنهٔ آن نقاطی از دامنهٔ تابع است که $f$ در آن‌ها مشتق‌پذیر است.

ضابطهٔ $f'$ نیز معمولاً از فرمول‌های مشتق به دست می‌آید.

**نکات**

۱) اگر $f$ در نقطه‌ای مثل $x-a$ به هر دلیلی مشتق نداشته باشد (ناپیوستگی، عدم برابری مشتق چپ و راست، بی‌نهایت‌شدن مشتق)، $a$ عضو دامنهٔ $f'$ نبوده و نمودار تابع $f'$ در نقطهٔ $x=a$ توخالی است.

۲) در بررسی مشتق‌پذیری تابع‌های چندضابطه‌ای، باید مشتق‌پذیری را در نقاط مرزی بررسی کنیم.

۳) اگر $f$ در بازه‌ای اکیداً صعودی باشد، نمودار $f'$ در آن بازه بالای محور $x$ها است.

۴) اگر $f$ در بازه‌ای اکیداً نزولی باشد، نمودار $f'$ در آن بازه پایین محور $x$ها است.

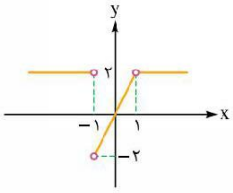
۵) اگر نمودار در نقطه‌ای مماس افقی داشته باشد، نمودار $f'$ در آن نقطه محور $x$ها را قطع می‌کند؛ چون مشتق در آن نقطه صفر می‌شود.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** تابع را به صورت $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & -۱\le x\le ۱ \\ ۲x+۳ & x<-۱ \text{ یا } ۱<x \end{cases}$ می‌نویسیم. تابع در نقاط به غیر $\pm ۱$ مشتق‌پذیر بوده و داریم $f'(x)=\begin{cases} ۲x & -۱<x<۱ \\ ۲ & x<-۱ \text{ یا } ۱<x \end{cases}$، اما باید مشتق‌پذیری را در نقاط ۱ و ۱− بررسی کنیم. (دقت کنید در ضابطهٔ $f'$ فعلاً علائم به صورت $>$ و $<$ هستند و مساوی ندارند تا این‌که مشتق‌پذیری را بررسی کنیم.)

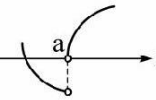
**گام دوم:** تابع در $x=۱$ پیوسته نیست، چون $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۵$ ، ولی $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۱$ ؛ پس تابع در $x=۱$ مشتق ندارد. (نمودار $f'$ در $x=۱$ باید توخالی باشد.)

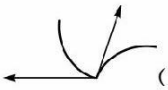
**گام سوم:** تابع در $x=-۱$ پیوسته است، چون $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=f(-۱)=۱$ . از طرفی $f'_+(-۱)=۲(-۱)=-۲$ ، ولی $f'_-(-۱)=۲$ ؛ پس تابع $f$ در $x=-۱$ نیز مشتق ندارد.

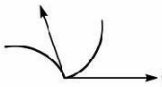
**گام چهارم:** ضابطهٔ $f'(x)=\begin{cases} ۲x & -۱<x<۱ \\ ۲ & x<-۱ \text{ یا } ۱<x \end{cases}$ می‌شود که نمودار آن به صورت مقابل است:

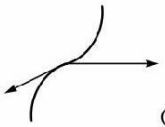


## تست و پاسخ 34

اگر نمودار تابع $f'$ در همسایگی $x=a$ به صورت  باشد، نمودار $f$ در همسایگی $x=a$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) 

۲) 

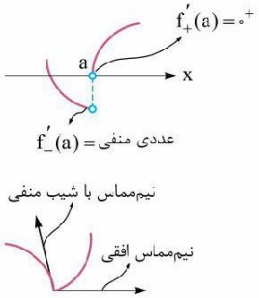
۳) 

۴)

**پاسخ: گزینه ۲**

**خودت حل کنی بهتره** با توجه به این‌که $f'_+(a)=0^+$ و «عدد منفی $=f'_-(a)$»، شکل $f$ در همسایگی $a$ را پیدا کنید.

**پاسخ تشریحی** **گام اول**: روی شکل، مقدار مشتق چپ و راست را پیدا می‌کنیم:




**گام دوم**: پس باید دنبال نموداری برای $f$ باشیم که:

- در همسایگی راست $a$:

۱) نیم‌مماس افقی داشته باشد.

۲) صعودی باشد.

- در همسایگی چپ $a$: نیم‌مماس با شیب منفی داشته باشد.

## تست و پاسخ 35

آهنگ متوسط تغییر $f(x)=\log_2 x$ در فاصلهٔ $[\frac{2}{5},\frac{16}{5}]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $g(x)=\frac{x^2-x}{7}$ در نقطه‌ای با کدام طول برابر است؟

۱) ۳/۷۵ ۲) ۴/۲۵

۳) ۴/۷۵ ۴) ۵/۲۵

**پاسخ: گزینه ۲**

**مشاوره** آهنگ تغییرات جزء مباحث آسان و قابل حل است. کلاً هم دو نوع دارد: متوسط و لحظه‌ای.

**خودت حل کنی بهتره** باید آهنگ متوسط $f$ را حساب کنید و با مشتق $g$ برابر قرار دهید.

**درس‌نامه** آهنگ تغییرات

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | متوسط | آهنگ متوسط تغییر $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ برابر است با: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ |
| ۲ | لحظه‌ای | آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در $x=a$ برابر است با: $f'(a)$ |

**نکته** $\log_c A-\log_c B=\log_c \frac{A}{B}$

**پاسخ تشریحی** **گام اول**: آهنگ تغییر متوسط $f(x)=\log_2 x$ در بازهٔ $[\frac{2}{5},\frac{16}{5}]$ را حساب می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(\frac{16}{5})-f(\frac{2}{5})}{\frac{16}{5}-\frac{2}{5}}=\frac{\log_2\frac{16}{5}-\log_2\frac{2}{5}}{\frac{14}{5}}=\frac{\log_2(\frac{\frac{16}{5}}{\frac{2}{5}})}{\frac{14}{5}}=\frac{\log_2 8}{\frac{14}{5}}=\frac{\frac{3}{1}}{\frac{14}{5}}=\frac{15}{14}$$

**گام دوم**: مشتق تابع $g(x)=\frac{1}{7}(x^2-x)$ را حساب می‌کنیم:

$$g'(x)=\frac{1}{7}(2x-1)=\frac{2x-1}{7}$$

آهنگ لحظه‌ای در $x=a$ را حساب می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای}=f'(a)=\frac{2a-1}{7}$$

**گام سوم**: می‌خواهیم آهنگ لحظه‌ای با آهنگ متوسط برابر شود، پس:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای}=\text{آهنگ متوسط}\Rightarrow\frac{2a-1}{\cancel{7}_{1}}=\frac{15}{\cancel{14}_{2}}\Rightarrow 4a-2=15\Rightarrow 4a=17\Rightarrow a=\frac{17}{4}=4/25$$

## تست و پاسخ 36

**اگر $P(x,y)$ نقطه‌ای روی منحنی $y=\frac{x+1}{x-2}$ باشد، آهنگ لحظه‌ای تغییر فاصلهٔ P از مبدأ مختصات، در نقطه با طول ۳ کدام است؟**

۱) $-1/8$ ۲) $-1/6$ ۳) $-1/7$ ۴) $-1/5$

**پاسخ: گزینه ۱**

**مشاوره** در ورژن سخت سؤالات آهنگ تغییرات، باید تابع را خودتان بنویسید و بعد از آن مشتق بگیرید.

**خودت حل کنی بهتره** فاصلهٔ $P(x,\frac{x+1}{x-2})$ تا $O(0,0)$ را برحسب x بنویسید و آهنگ تغییرش در $x=3$ (یعنی مشتقش در ۳) را حساب کنید.

**نکته** مشتق تابع هموگرافیک از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$(\frac{ax+b}{cx+d})'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

**پاسخ تشریحی** **گام اول**: مختصات پارامتری نقطهٔ P روی منحنی $y=\frac{x+1}{x-2}$ به صورت $P(x,\frac{x+1}{x-2})$ است.

**گام دوم**: فاصلهٔ $P(x,\frac{x+1}{x-2})$ تا مبدأ (یعنی $O(0,0)$) را حساب می‌کنیم:

$$OP=\sqrt{(x_P-x_o)^2+(y_P-y_o)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(\frac{x+1}{x-2}-0)^2}=\sqrt{x^2+(\frac{x+1}{x-2})^2}$$

**گام سوم**: برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر OP باید از عبارت بالا مشتق بگیریم:

$$y=\sqrt{x^2+(\frac{x+1}{x-2})^2}\Rightarrow y'=\frac{\cancel{2}x+\cancel{2}(\frac{x+1}{x-2})\overbrace{(\frac{x+1}{x-2})'}^{\text{مشتق هموگرافیک}}}{\cancel{2}\sqrt{x^2+(\frac{x+1}{x-2})^2}}=\frac{x+(\frac{x+1}{x-2})\times\frac{-2-1}{(x-2)^2}}{\sqrt{x^2+(\frac{x+1}{x-2})^2}}$$

حالا $x=3$ را قرار می‌دهیم:

$$\frac{3+(\frac{4}{1})\times(\frac{-3}{1})}{\sqrt{9+(\frac{4}{1})^2}}=\frac{3-12}{5}=\frac{-9}{5}=-1/8$$

# آزمون‌های سراسری گاج

www.mapedu.ir

**1** ۳ شیب خط مماس بر تابع f در نقطهٔ A کم‌تر از شیب خط مماس بر تابع f در نقطهٔ B است و هم‌چنین شیب‌ها مثبت‌اند.

$$0<\frac{m+1}{m-1}<3\Rightarrow\begin{cases}0<\frac{m+1}{m-1}\Rightarrow m>1 \text{ یا } m<-1\\ \frac{m+1}{m-1}-3<0\Rightarrow\frac{4-2m}{m-1}<0\Rightarrow m<1 \text{ یا } m>2\end{cases}$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ است. با توجه به گزینه‌ها $m=-\frac{3}{2}$ قابل قبول است.

**2** ۴ طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(-1)+\frac{1}{2}f'(-1)=6\Rightarrow f'(-1)=4$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{\sqrt{-x}-1}\times\frac{\sqrt{-x}+1}{\sqrt{-x}+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\times\lim_{x\to-1}(-\sqrt{-x}-1)$$

$$=-2f'(-1)=-2\times4=-8$$

**3** ۳ $f(0)=1$ است پس $A(0,1)$ نقطهٔ تماس است.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

معادلهٔ خط مماس : $y-1=\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow x=2y-2$

**4** ۱ به علت تقارنی که در سهمی وجود دارد، شیب خطوط مماس در دو نقطهٔ A و B قرینهٔ یک‌دیگرند پس شیب خط مماس در نقطهٔ A برابر $\frac{7}{3}$ است.

**5** ۱ اگر شیب خط مماس در A و B را به ترتیب با $m_A$ و $m_B$ نمایش دهیم، آن‌گاه:

$$\begin{cases}m_A+m_B=2\\ |m_A|=2|m_B|\end{cases}\xrightarrow[m_A>0]{m_B<0}\begin{cases}m_A+m_B=2\\ m_A+2m_B=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)}m_B=-2 \text{ و } m_A=4\Rightarrow m_A\times m_B=-8$$

**6** ۱ نقطهٔ $A(0,0)$ نقطهٔ تماس است. حال مشتق تابع را در $x=0$ محاسبه می‌کنیم.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to0}\sqrt{x+1}=1$$

خط مماس: $y-0=1(x-0)\Rightarrow y=x$

**7** ۲ با فرض $f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=A$ داریم:

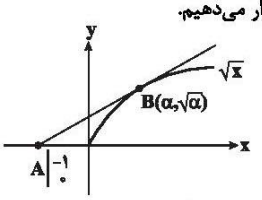
$$\frac{1}{A}+A=\frac{5}{2}\xrightarrow{\times2A}2+2A^2=5A\Rightarrow 2A^2-5A+2=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=2\\ A=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2A=4\\ 2A=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}(\sqrt{x}+1)\times\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2A$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای 2A برابر ۵ است.

**8** ۳ نقطهٔ تماس را $B(\alpha,\sqrt{\alpha})$ فرض می‌کنیم. شیب خط مماس را به دو طریق محاسبه و برابر هم قرار می‌دهیم.



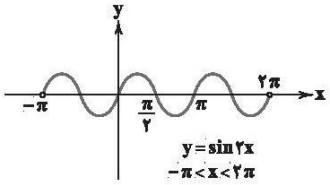

$$m_{AB}=f'(\alpha)\Rightarrow\frac{\sqrt{\alpha}-0}{\alpha+1}=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{x-\alpha}$$

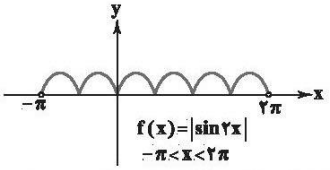
$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\Rightarrow\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

$$\Rightarrow 2\alpha=\alpha+1\Rightarrow\alpha=1\Rightarrow\sqrt{\alpha}=1$$

پس عرض نقطهٔ تماس برابر ۱ است.

**9** ۲ نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم.




ملاحظه می‌کنید که تابع $f(x)$ در ۶ نقطه دارای مشتق صفر است زیرا در این ۶ نقطه خطوط مماس افقی است.

**10** ۴ با توجه به فرض مسئله $f'(x)=\frac{4}{x^2}$ است.

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{4}{4}=1$$

**11** ۲

$$f'(x)=4\Rightarrow 3x^2-2kx-k^2=4$$

$$\Rightarrow 3x^2-2kx-k^2-4=0$$

$$x_1+x_2=\frac{2k}{3}=2\Rightarrow k=3$$

$$x_1x_2=\frac{-k^2-4}{3}=\frac{-9-4}{3}=\frac{-13}{3}$$

**12** ۴

$$f'(x)=\frac{2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{-6(x+1)^2}{(x+1)^6}=\frac{-6}{(x+1)^4}$$

$$f(x)f'(x)<f''(x)\Rightarrow\frac{-2}{(x+1)^5}<\frac{-6}{(x+1)^4}$$

$$\Rightarrow\frac{-2}{(x+1)^5}+\frac{6}{(x+1)^4}<0$$

$$\Rightarrow\frac{-2+6(x+1)}{(x+1)^5}<0\Rightarrow\frac{6x+4}{(x+1)^5}<0\Rightarrow -1<x<\frac{-2}{3}$$

**13** ۲

$$(f+۲)'(۱)=۳ \Rightarrow f'(۱)=۳$$
$$(f+f')(۱)=-۴ \Rightarrow f(۱)+f'(۱)=-۴$$
$$\Rightarrow f(۱)+۳=-۴$$
$$\Rightarrow f(۱)=-۷$$
$$g(x)=f^۳(x) \Rightarrow g'(x)=۳f^۲(x)f'(x)$$
$$\Rightarrow g'(۱)=۳f^۲(۱)f'(۱)$$
$$\Rightarrow g'(۱)=۳\times(-۷)^۲\times۳=۹\times۴۹=۴۴۱$$

**14** ۱

$$g(x)=f(x-f(\sqrt{x}))$$
$$\Rightarrow g'(x)=(x-f(\sqrt{x}))'f'(x-f(\sqrt{x}))$$
$$\Rightarrow g'(x)=(۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}f'(\sqrt{x}))f'(x-f(\sqrt{x}))$$
$$\Rightarrow g'(۱)=(۱-\frac{۱}{۲}f'(۱))f'(۱-f(۱))$$
$$=(۱-\frac{۱}{۲}\times۴)f'(۱)=(۱-۲)\times۴=-۴$$

**15** ۴ اگر T دورهٔ تناوب تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ باشد، آن‌گاه:

$$f(x+T)=f(x) \Rightarrow f'(x+T)=f'(x) \quad (۱)$$

از رابطهٔ (۱) معلوم می‌شود که T دورهٔ تناوب $f'(x)$ نیز می‌باشد.

$$۲x+۳y=۶ \xrightarrow{x=۳} y=۰ \Rightarrow (۳,۰)\in f(x)$$ (نقطهٔ تماس)

شیب خط (مماس)، $۲x+۳y=۶$ برابر $-\frac{۲}{۳}$ است پس $f'(۳)=-\frac{۲}{۳}$ خواهد بود.

$$\frac{f'(۳)+۱}{f'(۵)}=\frac{f'(۳)+۱}{f'(۳)}=۱+\frac{۱}{f'(۳)}=۱-\frac{۳}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

**16** ۴ تابع f در $x=\frac{-۷}{۴}$ پیوسته است، کافی است در همسایگی $x=\frac{-۷}{۴}$ براکت را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم.

$$x=\frac{-۷}{۴} \Rightarrow f(x)=\frac{-(۴x+۳)\times[\frac{۷}{۴}]}{-۴x-۱}=\frac{۴x+۳}{۴x+۱}$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-۸}{(۴x+۱)^۲}$$
$$\Rightarrow f'(-\frac{۷}{۴})=\frac{-۸}{(-۷+۱)^۲}=\frac{-۸}{۳۶}=\frac{-۲}{۹}$$

**17** ۳ در همسایگی راست $x=۲$ عبارت $۸-x^۳$ منفی است. پس:

$$f(x)=\underbrace{(x^۳-۸)}_{g(x)}\underbrace{(۱+\frac{۱}{x})}_{h(x)},\ g'(x)=۳x^۲$$
$$f'_+(۲)=g'(۲)h(۲)=۱۲\times\frac{۳}{۲}=۱۸$$

**18** ۲ کافی است در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد.

$$f(۱)=\lim_{x\to۱}f(x) \Rightarrow a+b=۰ \Rightarrow a=-b \quad (۱)$$
$$f'(x)=\begin{cases}۲ax+b & x\geq۱\\ \frac{۱}{۲\sqrt{x}} & ۰<x<۱\end{cases}$$
$$f'_+(۱)=f'_-(۱) \Rightarrow ۲a+b=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{(۱)} \begin{cases}a=\frac{۱}{۲}\\ b=\frac{-۱}{۲}\end{cases}$$

ضابطهٔ اول: $f'(x)=۲ax+b \Rightarrow f'(۲)=۴a+b=۲-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$

**19** ۱ چون f و g خطی‌اند پس $f(x)\times g(x)$ تابع درجه دوم خواهد بود. در تابع درجه دوم آهنگ متوسط بازه $[a,b]$ برابر با آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $\frac{a+b}{۲}$ است. در نتیجه آهنگ متوسط تابع $(fg)(x)$ در بازه $[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}]$ برابر آهنگ لحظه‌ای در نقطه $\frac{-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}}{۲}$ یعنی $\frac{۱}{۱۲}$ است. بنابراین اختلاف برابر صفر است.

**20** ۱

$$f'(۱)=\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)(x+۱)\sqrt[۳]{x+۱}}{x-۱}$$
$$=\lim_{x\to۱}(x+۱)\sqrt[۳]{x+۱}=۲\sqrt[۳]{۲}$$
$$f'(-۱)=\lim_{x\to-۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to-۱}\frac{(x-۱)(x+۱)\sqrt[۳]{x+۱}}{x+۱}$$
$$=\lim_{x\to-۱}(x-۱)\sqrt[۳]{x+۱}=۰$$
$$f'(۱)+f'(-۱)=۲\sqrt[۳]{۲}$$

**21** ۳

$$f(x)f'(x)+xf(x)f'(x)=۰ \Rightarrow (۱+x)f(x)f'(x)=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases}۱+x=۰ \Rightarrow x=-۱\\ f(x)=۰ \Rightarrow x=-۲,\frac{۴}{۵},۳\\ f'(x)=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲},x=۱\end{cases}$$

مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$-۱-۲+۱+۳-\frac{۱}{۲}+\frac{۴}{۵}=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۴}{۵}=\frac{۱۰-۵+۸}{۱۰}=\frac{۱۳}{۱۰}=۱/۳$$

**22** (۲)

$$3f'(2)-5=4 \Rightarrow f'(2)=3$$

$$\frac{f(2)+1}{f(2)-2}=4 \Rightarrow f(2)=3$$

دقت کنید که:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h(h+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h+1}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=f'(2)=3$$

$$B=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{f(x)(f(x)-f(2))}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{f(x)}\times\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{f(x)-f(2)}$$

$$=\frac{2+2}{3}\times\frac{1}{f'(2)}=\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$

$$A\times B=3\times\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$$

**23** (۱) صورت و مخرج را بر $x-4$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}}{\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}+\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{x-4}}=\frac{3}{4}$$

می‌دانیم $f'(4)=\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ پس:

$$\frac{f'(4)}{f'(4)+1}=\frac{3}{4}\Rightarrow 4f'(4)=3f'(4)+3\Rightarrow f'(4)=3$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{2h}=\frac{1}{2}f'(4)=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$$

**24** (۱)

$$g'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)f(x)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)f(x)$$

$$=3\lim_{x\to 1}(x+x^2)=6$$

**25** (۲)

$$g'(1)=3\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=3\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax-(1+a)}{x-1}=3$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)+a(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1+a)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1+a)=3+a=3\Rightarrow a=0$$

$$g'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3$$

$$g'(1)g'(-1)=3\times 3=9$$

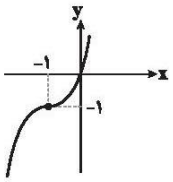
**26** (۱) با توجه به شکل، شیب خط مماس در نقطهٔ A برابر شیب پاره‌خط AB است، بنابراین داریم:

$$f'(x_A)=\frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A}\Rightarrow f'(1)=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}$$

$$\Rightarrow 4f'(1)+f(1)=f(5)$$

**27** (۱) نمودار تابع داده شده را رسم می‌کنیم.

$$y=(x+1)^3-1$$




شیب خط $3x+4y=7$ منفی است. هیچ نقطه‌ای در تابع وجود ندارد که شیب خط مماس در آن منفی باشد.

**28** (۲) در همسایگی چپ $x=1$ داریم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}(1-x^3)}{1+x}=\underbrace{(1-x^3)}_{H(x)}\times\underbrace{\frac{\sqrt{x}}{1+x}}_{G(x)}$$

$$H'(x)=-3x^2\Rightarrow H'(1)=-3$$

$$f'_-(1)=H'(1)G(1)=-3\times\frac{1}{1+1}=-\frac{3}{2}$$

**29** (۴) تابع f در $x=4$ پیوسته است زیرا $f(4)=\lim\limits_{x\to 4}f(x)=0$ است. در همسایگی راست $x=4$ داریم:

$$f(x)=-5(x^2-16)\Rightarrow f'(x)=-10x\Rightarrow f'_+(4)=-40$$

حال معادلهٔ خطی را که از نقطهٔ $(4,0)$ عبور کرده و شیب آن $-40$ است را می‌نویسیم:

$$y-0=-40(x-4)\Rightarrow y+40x=160$$

**30** (۱)

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)+2(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}\times\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}+\lim_{x\to 3}\frac{2}{x+3}=1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{6}f'(3)+\frac{1}{3}=1\Rightarrow\frac{1}{6}f'(3)=\frac{2}{3}\Rightarrow f'(3)=4$$

$$y=xf(3x)\Rightarrow y'=1\times f(3x)+3xf'(3x)\Rightarrow y'(1)=f(3)+3f'(3)$$

$$=4+3\times 4=16$$

**31** ۲ **حالت اول** : در ریشهٔ مضاعف زیر رادیکال، مشتق وجود نـدارد اما خط مماس وجود دارد.

$$\Delta=(\frac{1}{2})^2-4(m)(-1)=0\Rightarrow 4m=-\frac{1}{4}\Rightarrow m=-\frac{1}{16}$$ زیر رادیکال

$$\text{ریشهٔ مضاعف}=\frac{-\frac{1}{2}}{2m}=\frac{-1}{4m}=\frac{-1}{4\times\frac{-1}{16}}=4$$

پس معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ مشتق ناپذیر، $x=4$ است.

**حالت دوم:** اگر $m=0$ شود تابع به‌صورت $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x}{2}-1}$ تبدیل شده و فقط در $x=2$ مشـتق نـدارد ولـی خـط ممـاس وجـود دارد و معادلـهٔ آن $x=2$ است.

**32** ۴

$$h(x)=f(x)g(x)=(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})^{1400}$$

$$(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1})^{1400}\Rightarrow h(x)=3^{1400}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})$$

$$\Rightarrow h'(x)=3^{1400}(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}})$$

$$\Rightarrow h'(2)=3^{1400}(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}\times 3^{1400}$$

**33** ۱ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه‌ای به طول ۱ بـر هـم ممـاس هستند، پس:

$$f'(1)=g'(1)\,,\,f(1)=g(1)$$

$$f'(x)=2x\Rightarrow f'(1)=2$$

$$g'(x)=-2x+b\Rightarrow g'(1)=-2+b$$

$$f'(1)=g'(1)\Rightarrow 2=-2+b\Rightarrow b=4$$

$$f(1)=g(1)\Rightarrow -1+b+c=1+1\xrightarrow{b=4}c=-1$$

$$\Rightarrow g(x)=-x^2+4x-1$$

$$g'(x)=-2x+4\Rightarrow g'(2)=0$$

**34** ۲ از طرفین تابع داده شده مشتق می‌گیریم و به جای $x$ عـدد ۱ قرار می‌دهیم:

$$g'(x)f'(g(x))=\frac{1}{\sqrt{x}}+3a\xrightarrow{x=1}g'(1)f'(g(1))=1+3a$$

$$\xrightarrow{g(1)=4}g'(1)f'(4)=1+3a\qquad(1)$$

شیب خط مماس بـر $g$ در نقطـهٔ $(1,4)$ برابـر $g'(1)$ و شـیب خـط ممـاس بر $f(x)$ در نقطه‌ای به طول ۴ برابر $f'(4)$ است. چون این دو خط مماس بر هم عمودند، پس: $g'(1)f'(4)=-1\xrightarrow{(1)}1+3a=-1\Rightarrow a=-\frac{2}{3}$

**35** ۴

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{2f^2(x)-2f^2(2)+2f^2(2)-4x}{x(x-2)}\xrightarrow{f(2)=2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(f^2(x)-f^2(2))-4(x-2)}{x(x-2)}$$

$$=2\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+f(2)}{x}-\lim_{x\to 2}\frac{4}{x}$$

$$=2\times f'(2)\times f(2)-2=2\times 3\times 2-2=10$$

**36** ۲ تـابع مـورد نظـر در نقـاط $x=1$ و $x=2$ بـه دلیـل نقطـهٔ گوشه‌ای، مشتق ندارند.

$$f(x)=\begin{cases}x & 0<x<1\\ -x+2 & 1\le x\le 2\\ x-2 & 2<x<3\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ -1 & 1<x<2\\ 1 & 2<x<3\end{cases}$$

بنابراین نمودار $f'$ شبیه گزینه (۲) است.

**37** ۲

$$f(-3)=\sqrt[3]{(\frac{-5}{-5})^2}=1\Rightarrow(-3,1)\in f$$

$$f'(x)=\frac{2\times\frac{-4-1}{(x-2)^2}}{3\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x-2}}}\Rightarrow f'(-3)=\frac{\frac{-10}{25}}{3\times 1}=\frac{-2}{15}$$

$$\text{خط مماس}:y-1=\frac{-2}{15}(x+3)\xrightarrow{x=0}y=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}=0/6$$

**38** ۲

$$f(x^2-4)=xg(2x+1)\Rightarrow 2xf'(x^2-4)=g(2x+1)+2xg'(2x+1)$$

$$x=1\Rightarrow 2f'(-3)=g(3)+2g'(3)=1+2=3\Rightarrow f'(-3)=\frac{3}{2}$$

**39** ۳ برای $x>0$ می‌توان از ر ابطهٔ $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ استفاده کرد.

$$f(x)=x^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{3}x^{\frac{-4}{3}}$$

$$g(x)=\frac{x}{-\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}}}=-3x^1\times x^{\frac{4}{3}}=-3x^{\frac{7}{3}}\Rightarrow g'(x)=-7x^{\frac{4}{3}}$$

$$\Rightarrow g'(8)=-7\times 8^{\frac{4}{3}}=-7\times 2^4=-7\times 16=-112$$

**۴۰** (۱)

$$y'=8\Rightarrow (x-1)^3=8\Rightarrow x=3\Rightarrow A(3,\frac{29}{7})$$

**۴۱** (۴) در تابع $f(x)=\frac{(x-2)^2}{[x]^2+a^2}$ عدد ۲ صفرِ مضاعف تابع $f(x)$ است.

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{[x]^2+a^2}=0\Rightarrow a\in\mathbb{R}$$

**۴۲** (۳)

$$f'(x)=\frac{0-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(c)=\frac{f(9)-f(1)}{9-1}\Rightarrow\frac{-1}{2c\sqrt{c}}=\frac{\frac{1}{3}-1}{8}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{c\sqrt{c}}=\frac{1}{6}\Rightarrow c\sqrt{c}=6\Rightarrow c^3=36\Rightarrow c=\sqrt[3]{36}$$

**۴۳** (۳) تابع $f(x)$ در $x=1$ ناپیوسته است، اما پیوستگی چپ دارد، بنابراین به دلیل نداشتن پیوستگی راست، $f'_+(1)$ وجود ندارد. در همسایگی چپ $x=1$ داریم:

$$f(x)=1-x\Rightarrow f'(x)=-1\Rightarrow f'_-(1)=-1$$

**۴۴** (۱) اگر نقطهٔ تماس را c فرض کنیم، باید $f(c)=g(c)$ و $f'(c)=g'(c)$ باشد.

$$f'(c)=g'(c)\Rightarrow c^2+4=4c\Rightarrow c^2-4c+4=0$$

$$\Rightarrow (c-2)^2=0\Rightarrow c=2$$

$$f(c)=g(c)\Rightarrow f(2)=g(2)\Rightarrow\frac{8}{3}+8+k=7$$

$$\Rightarrow k=-1-\frac{8}{3}=-\frac{11}{3}$$

**۴۵** (۳)

$$f(x)=x^2\log_4 x-4\log_4 x=\underbrace{(x^2-4)}_{g(x)}\log_4 x$$

$$f'(2)=g'(2)\log_4 2=4\log_4 2=2$$

**۴۶** (۲)

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+3\Rightarrow f''(x)=\frac{0-\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x}=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f''(16)=-\frac{1}{4\times 16\times 4}=-\frac{1}{256}$$

**۴۷** (۴)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{20h}=\frac{1}{20}f'(2)=\frac{1}{20}(\sin\frac{\pi}{2}+\log_2 2)=0/1$$

**۴۸** (۲) طبق امتحان تقسیم داریم:

$$f(x)=(x-2)(x^3+x+1)+kx^2+x+k$$

$$f(1)=8\Rightarrow -3+2k+1=8\Rightarrow 2k=10\Rightarrow k=5$$

$$f'(x)=x^3+x+1+(x-2)(3x^2+1)+10x+1$$

$$f'(2)=8+2+1+20+1=32$$

**۴۹** (۱)

$$g(x)=\frac{1}{\frac{1}{x^3+1}}=x^3+1\Rightarrow g'(x)=3x^2$$

**۵۰** (۱) در هر نقطه‌ای $f'(x)=2$ است.

$$g(x)=f(2x^2+3x)+f(\frac{x}{2x+3})$$

$$g'(x)=(4x+3)f'(2x^2+3x)+\frac{2x+3-2x}{(2x+3)^2}f'(\frac{x}{2x+3})$$

$$\Rightarrow g'(2)=(8+3)\times 2+\frac{3}{49}\times 2=22+\frac{6}{49}$$

$$\Rightarrow g'(2)-22=\frac{6}{49}$$

**۵۱** (۴)

$$g(2)+3=7\Rightarrow g(2)=4$$

$$f'(4)+5=7\Rightarrow f'(4)=2$$

$$g'(2)+4=7\Rightarrow g'(2)=3$$

$$h(x)=(fog)(x)\Rightarrow h'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

$$h'(2)=g'(2)f'(g(2))=3f'(4)=3\times 2=6$$

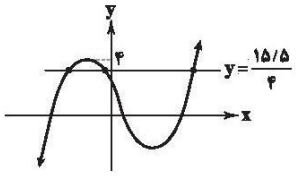
**۵۲** (۳) ابتدا تابع وارون را حساب می‌کنیم.

$$y=\frac{2x+3}{x+1}\Rightarrow xy+y=2x+3\Rightarrow x(y-2)=3-y$$

$$\Rightarrow x=\frac{3-y}{y-2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3-x}{x-2}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x)=\frac{-1(x-2)-1(3-x)}{(x-2)^2}=-\frac{1}{(x-2)^2}=-(x-2)^{-2}$$

**۵۳** (۱) در واقع خواستهٔ مسئله تعداد ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=\frac{15/5}{4}$ است، بنابراین تعداد نقاط برخورد دو تابع $y=f'(x)$ و $y=\frac{15/5}{4}$ جواب مسئله است.




جواب مسئله ۳ نقطه است.

**۵۴** (۳) تابع $h(x)$ در $x=2$ پیوسته و مشتق چپ و راست متناهی و نابرابر دارد.

$$h'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)[-x]}{x-2}=-3$$

$$h'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)[-x]}{x-2}=2$$

**۵۵** ۴

$$\lim_{x\to ۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲}=g'(۲)=۳$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۳-۸}{۵-g(x)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{g(x)-g(۲)}\times\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۲x+۴}{-۱}$$

$$=\frac{-۱۲}{g'(۲)}=\frac{-۱۲}{۳}=-۴$$

**۵۶** ۳ معادلهٔ خط $\Delta$ گذرا از A و B را می‌نویسیم:

$$m_{AB}=\frac{-۴+۱}{۲-۳}=۳$$

$$\Delta: y+۱=۳(x-۳)\xrightarrow{y=۲۰}۲۱=۳(x-۳)\Rightarrow x=۱۰$$

پس نقطهٔ تماس $C(۱۰,۲۰)$ است.

$$\lim_{x\to ۱۰}\frac{f^۲(x)-۲۰f(x)}{۲x-۲۰}=\lim_{x\to ۱۰}\frac{f(x)}{۲}\times\lim_{x\to ۱۰}\frac{f(x)-f(۱۰)}{x-۱۰}$$

$$=\frac{f(۱۰)}{۲}\times f'(۱۰)=\frac{۲۰}{۲}\times ۳=۳۰$$

**۵۷** ۳ طول نقطهٔ B را b فرض می‌کنیم.

$$f'(b)=\lim_{x\to b}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{b}}{x-b}=\frac{۱}{۲\sqrt{b}}$$

خط L از نقطهٔ $(-۲,۰)$ عبور می‌کند.

$$y-\sqrt{b}=\frac{۱}{۲\sqrt{b}}(x-b)\xrightarrow{(-۲,۰)}-\sqrt{b}=\frac{۱}{۲\sqrt{b}}(-۲-b)$$

$$\Rightarrow -۲b=-۲-b\Rightarrow b=۲$$

$$S_{OABC}=۲\times\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$$

**۵۸** ۱

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱}f(x)\Rightarrow a+۱=۴+۲b\Rightarrow a=۲b+۳\quad(۱)$$

$$f'(x)=\begin{cases}۳ax^۲+۲x & x\geq ۱\\ ۴ & x<۱\end{cases}$$

$$f'_+(۱)=f'_-(۱)\Rightarrow ۳a+۲=۴\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{(۱)}b=-\frac{۷}{۶}$$

$$\frac{f(۰)}{f'(۲)}=\frac{۲b}{۱۲a+۴}=\frac{b}{۶a+۲}=\frac{-\frac{۷}{۶}}{۴+۲}=-\frac{۷}{۳۶}$$

**۵۹** ۱

$$f\left(\frac{x+۲}{x-۳}\right)=\frac{۲(x-۳)}{x+۲}+\frac{۳(x+۲)}{x-۳}\Rightarrow f(x)=\frac{۲}{x}+۳x$$

$$f'(x)=\frac{-۲}{x^۲}+۳\Rightarrow f'(۱)=-۲+۳=۱$$

**۶۰** ۴

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=-۸\Rightarrow f'(۴)=-۸$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{g(۳)-g(h+۳)}{h}=۳\Rightarrow g'(۳)=-۳$$

$$f(x+۱)=g(x)+h(x)-x$$

$$\Rightarrow f'(x+۱)=g'(x)+h'(x)-۱\xrightarrow{x=۳}$$

$$f'(۴)=g'(۳)+h'(۳)-۱\Rightarrow h'(۳)=-۴$$

**۶۱** ۲

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)f(a)-g(a)f(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{g(x)f(a)-g(a)f(a)+g(a)f(a)-g(a)f(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(a)(g(x)-g(a))-g(a)(f(x)-f(a))}{x-a}$$

$$=f(a)\times\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}-g(a)\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=f(a)g'(a)-g(a)f'(a)=(۲)(-۲)-(-۱)(۱)=-۴+۱=-۳$$

**۶۲** ۱

$$f(x)=(x-۱)(x+۱)(x^۲+x+۱)(x^۲-x+۱)=(x^۳-۱)(x^۳+۱)$$

$$\Rightarrow f(x)=x^۶-۱\Rightarrow f'(x)=۶x^۵\Rightarrow f''(x)=۳۰x^۴$$

$$f''(\sqrt{۲})=۳۰(\sqrt{۲})^۴\Rightarrow f''(\sqrt{۲})=۱۲۰$$

**۶۳** ۴

$$۲x^۴-x^۳+mx^۲+nx+p=(x-۳)f(x)\xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}}$$

$$۸x^۳-۳x^۲+۲mx+n=f(x)+(x-۳)f'(x)\xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}}$$

$$۲۴x^۲-۶x+۲m=f'(x)+f'(x)+(x-۳)f''(x)\xrightarrow{x=۳}$$

$$۲۴\times ۹-۶\times ۳+۲m=f'(۳)+f'(۳)+۰\Rightarrow ۱۹۸+۲m=۲\times ۹۵$$

$$\Rightarrow m=-۴$$